

# Factos aleatórios em Geometria

8 de Novembro de 2014

## **Resumo**

O objectivo deste artigo é exhibir alguns resultados “aleatórios” de Geometria que têm por vezes grande aplicabilidade em problemas difíceis de olimpíadas.

## Índice

<b>1</b>	<b>A recta <math>HM</math></b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Incentro, Excentro e Ponto Médio do Arco</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Circunferências tangentes à circunferência circunscrita</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Fenómeno Homotético Circular</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Ponto Médio da Altura</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Monge D’Alembert</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>Uma congruência com pontos médios de arcos</b>	<b>22</b>
<b>8</b>	<b>Conjugados Isogonais</b>	<b>24</b>
8.1	Simedianas . . . . .	27
<b>9</b>	<b>Roto-homotetias e o Teorema de Miquel</b>	<b>32</b>
9.1	Teoremas de Miquel . . . . .	36
9.2	Roto-Homotetias em números complexos . . . . .	39
<b>10</b>	<b>Ponto de Miquel em quadriláteros cíclicos</b>	<b>42</b>
<b>11</b>	<b>Rectas de Simson, Steiner e Gauss</b>	<b>45</b>
11.1	Recta de Simson . . . . .	45
11.2	Recta de Steiner . . . . .	46
11.3	Recta de Gauss . . . . .	48
<b>12</b>	<b>Circunferência de Apolónio</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Ângulos orientados módulo <math>\pi</math></b>	<b>56</b>

## Introdução e notação

O seguinte artigo tem por objectivo explorar configurações que são frequentemente abordadas em problemas de geometria de olimpíadas. Não é tanto uma “enciclopédia” de teoremas geométricos, mas uma colectânea de ideias comuns que visam familiarizar os leitores com as configurações mais “típicas”; são exibidas várias destas configurações, e algumas técnicas que se baseiam nelas.

Compreender as provas e os resultados aqui apresentados requer pouco mais que alguma familiaridade com as ideias mais “standard” de geometria olímpica: para aqueles que não são ainda familiares com tais ideias, os autores têm outro artigo, “Geometria para Principiantes”, também disponível online. É também necessário algum à-vontade com ângulos orientados módulo  $\pi$  para ler algumas provas; para quem ainda não tem tal à-vontade, disponibilizámos no final do artigo um pequeno texto (Apêndice A) onde explicamos sucintamente como esta notação “funciona”. Não se assustem: é bastante parecido com a nossa maneira usual de trabalhar com ângulos e só utilizamos esta notação em algumas provas. Por fim, utilizamos o Teorema de Pascal e algumas ideias básicas sobre homotetias; por vezes, alguns teoremas apresentam duas demonstrações, uma das quais pode utilizar artilharia mais avançada, como Geometria Projectiva; mas fornece-se sempre uma demonstração “normal” sem tal artilharia.

As secções do artigo são essencialmente independentes umas das outras; mesmo assim, a sua ordem não é completamente aleatória. Por vezes algumas secções utilizam ideias que já apareceram em secções anteriores, ou tais ideias podem ser úteis (ainda que não totalmente essenciais) para resolver problemas propostos nessas secções.

Sobre os problemas propostos: em cada secção, os problemas propostos usam (ou, melhor dizendo, podem usar) as ideias expostas nessa secção. Tal não quer dizer que todos os problemas serão imediatos com essas ideias; alguns são sem dúvida mais fáceis (os problemas não estão ordenados por dificuldade) e podem ser relativamente directos com estas técnicas, mas outros mais difíceis, e, mesmo depois de conhecer estas ideias, continua a ser necessária uma boa dose de criatividade/desenrascanço para os resolver. Resolvê-los pode (ou não) levar o seu tempo, e como tal, não é necessário, depois de ler uma secção, resolver logo instantaneamente todos os problemas dessa secção!

Como habitual, muitos dos problemas/teoremas aqui apresentados partem de um “triângulo  $[ABC]$ ”; nestes casos, utilizamos as já usuais notações  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ ; e também  $\alpha = \widehat{CAB}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  e  $\gamma = \widehat{BCA}$ . A notação para amplitudes de ângulos aqui utilizada não é consistente: ambos os símbolos  $\angle$  e  $\widehat{\phantom{a}}$  são frequentemente usados.

Os autores pedem ainda desculpa por serem preguiçosos e utilizarem por vezes os termos “circuncículo” e “incirculo” em lugar de “circunferência circunscrita” e “circunferência inscrita”, respectivamente.

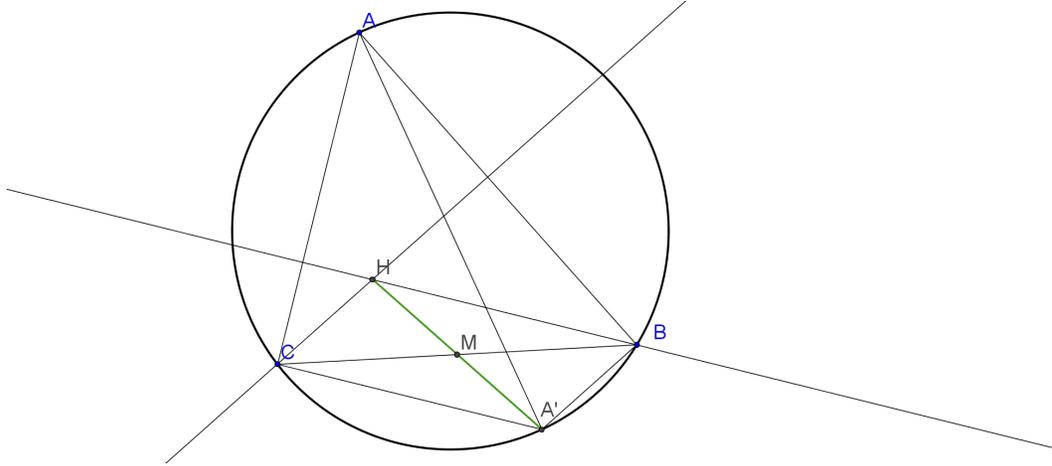
Boa leitura e divirtam-se com os 73 problemas aqui apresentados!

Os autores

## 1 A recta $HM$

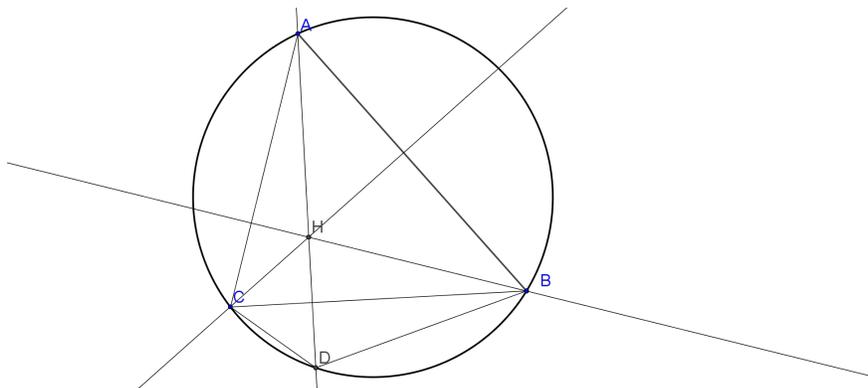
A recta que passa pelo ortocentro do triângulo e pelo ponto médio de um dos lados intersecta a circunferência circunscrita em dois pontos interessantes.

**Teorema 1.1.** *Seja  $H$  o ortocentro do triângulo  $[ABC]$ , e seja  $M$  o ponto médio do lado  $[BC]$ . Seja  $A'$  o ponto diametralmente oposto a  $A$  na circunferência circunscrita a  $[ABC]$ . Então  $A'$  é a reflexão de  $H$  por  $M$ .*



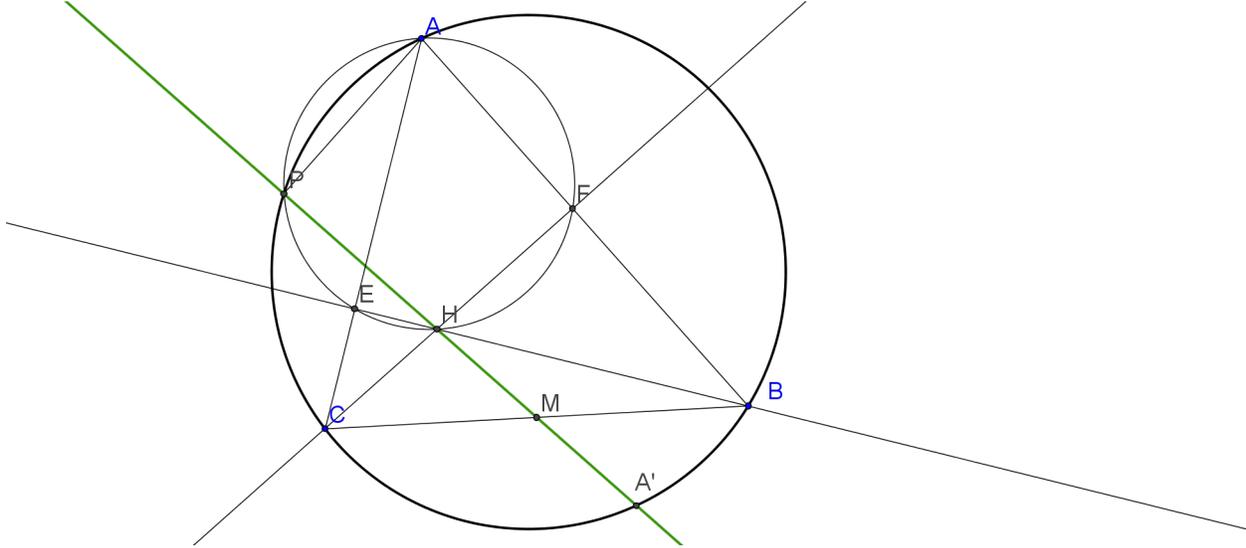
*Demonstração.* É evidente que o que queremos provar é equivalente a que  $[CHBA']$  seja um paralelogramo. Ora, como  $[AA']$  é um diâmetro,  $\widehat{ABA'} = \frac{\pi}{2}$ , logo  $\widehat{CBA'} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABC} = \widehat{BCH}$ . Logo,  $BA'$  é paralela a  $CH$ . Analogamente,  $CA'$  é paralela a  $BH$ . Logo,  $[CHBA']$  é um paralelogramo como pretendido.  $\square$

Observe-se que o Teorema 1.1 nos diz, em particular, que a reflexão de  $H$  pelo ponto médio de  $[BC]$  está na circunferência circunscrita. Isto acontece porque  $\widehat{CHB} = \pi - \widehat{CAB}$ ; pelo mesmo motivo, temos também que a reflexão de  $H$  pela recta  $BC$  está na circunferência circunscrita.



Conhecer estes factos pode motivar ideias úteis em problemas. Mas, curiosamente, o Teorema 1.1 não é tudo o que há para dizer sobre a recta  $HM$ . Também temos o

**Teorema 1.2.** *Seja  $H$  o ortocentro do triângulo  $[ABC]$  e sejam  $E = BH \cap AC$ ,  $F = CH \cap AB$ . Então  $HM$  intersecta a circunferência circunscrita a  $[ABC]$  num ponto  $P$  que pertence à circunferência circunscrita a  $[AFHE]$ .*



*Demonstração.* Como a recta  $HM$  passa por  $A'$ , temos  $H\widehat{P}A = A'\widehat{P}A = \frac{\pi}{2}$ , logo, como  $H\widehat{E}A = A\widehat{F}H = \frac{\pi}{2}$ , temos o pretendido.  $\square$

Os próximos problemas têm soluções que passam por estes factos ou que, pelo menos, são motivadas por eles.

**Problema 1** (Brasil 2011). *Seja  $[ABC]$  um triângulo acutângulo com ortocentro  $H$ . Seja  $D$  a intersecção de  $BH$  e  $AC$  e seja  $E$  a intersecção de  $CH$  e  $AB$ . A circunferência circunscrita a  $[ADE]$  intersecta a circunferência circunscrita a  $[ABC]$  num ponto  $F \neq A$ . Prova que as bissetrizes de  $\angle BFC$  e  $\angle BHC$  concorrem num ponto sobre  $BC$ .*

**Problema 2** (Rioplatense 2006). *O triângulo acutângulo  $[ABC]$  tem circunferência circunscrita  $\Gamma$ , circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$ . O ponto médio de  $[BC]$  é  $M$ , e a mediana  $AM$  intersecta  $\Gamma$  em  $N$ . A circunferência de diâmetro  $[AM]$  intersecta  $\Gamma$  em  $A$  e  $P$ . Prova que as rectas  $AP$ ,  $BC$  e  $OH$  são concorrentes se e só se  $\overline{AH} = \overline{HN}$ .*

**Problema 3** (TST EUA 2014). *Seja  $[ABC]$  um triângulo acutângulo, e seja  $X$  um ponto na sua circunferência circunscrita. Sejam  $P$  e  $Q$  as projecções ortogonais de  $X$  sobre as rectas  $CA$  e  $CB$ , respectivamente. Seja  $R$  a intersecção da recta  $PQ$  com a recta perpendicular a  $AC$  por  $B$ . Seja  $l$  a recta que passa por  $P$  e é paralela a  $XR$ . Prova que, quando  $X$  varia, a recta  $l$  passa por um ponto fixo.*

**Problema 4** (IMO Shortlist 2005). *Seja  $[ABC]$  um triângulo acutângulo com  $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ . Seja  $H$  o ortocentro de  $[ABC]$ , e seja  $M$  o ponto médio do lado  $[BC]$ . Sejam  $D$  e  $E$  pontos nos lados  $[AB]$  e  $[AC]$ , respectivamente, tais que  $\overline{AD} = \overline{AE}$  e  $D, H$  e  $E$  são colineares. Prova que  $HM$  é perpendicular à corda comum das circunferências circunscritas a  $[ABC]$  e  $[ADE]$ .*

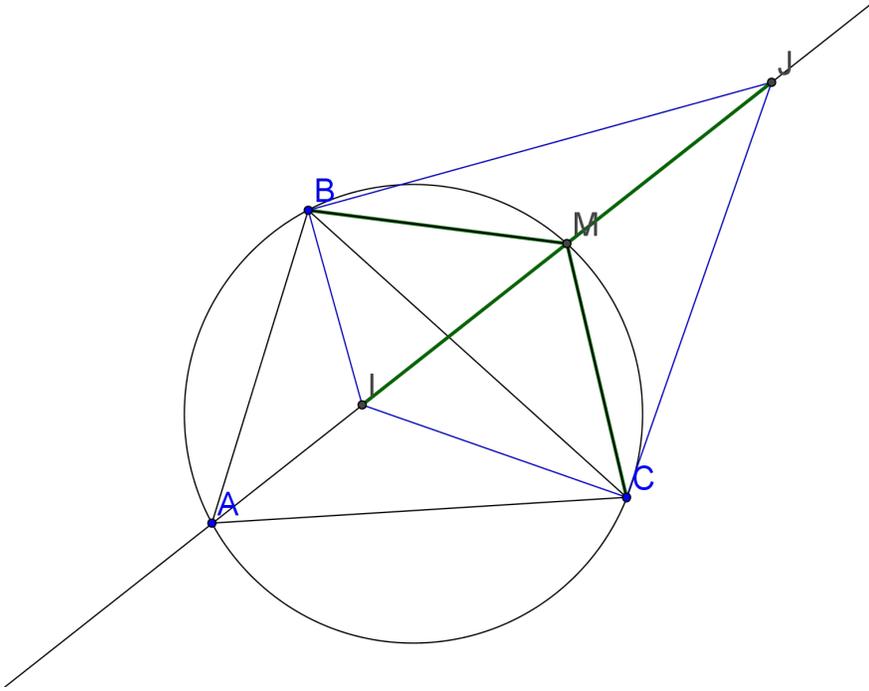
**Problema 5** (TST China 2006). *Seja  $\omega$  a circunferência circunscrita ao triângulo  $[ABC]$ , e seja  $P$  um ponto. Sejam  $A_1, B_1$  e  $C_1$  as segundas intersecções de  $AP, BP$  e  $CP$ , respectivamente, com  $\omega$ , e sejam  $A_2, B_2$  e  $C_2$  as reflexões de  $A_1, B_1$  e  $C_1$  pelos pontos médios de  $[BC], [AC]$  e  $[AB]$ , respectivamente.*

*Prova que o ortocentro de  $[ABC]$  pertence à circunferência circunscrita a  $[A_2B_2C_2]$ .*

## 2 Incentro, Excentro e Ponto Médio do Arco

O facto que vamos apresentar parece, a princípio, uma mera curiosidade: resulta de um simples angle-chasing.

**Teorema 2.1.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo,  $I$  o seu incentro,  $J$  o seu excentro relativo a  $A$  e  $M$  o ponto de intersecção de  $AI$  com a circunferência circunscrita a  $[ABC]$ , ou seja, o ponto médio do arco  $BC$  que não contém  $A$ . Então  $\overline{MI} = \overline{MJ} = \overline{MB} = \overline{MC}$ .*

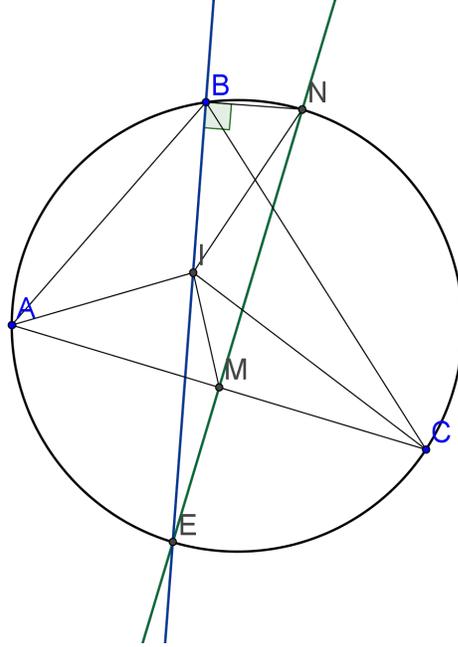


*Demonstração.* Temos  $\widehat{MCI} = \widehat{MCB} + \widehat{BCI} = \widehat{IAB} + \widehat{BCI} = \frac{\widehat{CAB} + \widehat{BCA}}{2} = \frac{\pi - \widehat{ABC}}{2}$ . Além disso,  $\widehat{IMC} = \widehat{AMC} = \widehat{ABC}$ . Daqui decorre que  $\widehat{CIM} = \frac{\pi - \widehat{ABC}}{2}$  e portanto  $\overline{MI} = \overline{MC} = \overline{MB}$ . A prova para o excentro é semelhante.  $\square$

Qual a utilidade deste facto? Apesar de resultar de simples angle-chasing, conhecê-lo de antemão pode ser uma grande vantagem. Mas esta igualdade tem consequências inesperadas: dá-nos interessantes igualdades de ângulos se “misturada” com um pouco de potência de ponto. Vamos ver um exemplo.

**Problema 6.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo com incentro  $I$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $[AC]$ , e seja  $N$  o ponto médio do arco  $AC$  que contém  $B$  da circunferência circunscrita a  $[ABC]$ . Prova que  $\widehat{IMA} = \widehat{INB}$ .*

Primeiras observações: a recta  $MN$  é a mediatriz de  $[AC]$ . Então a recta  $MN$  contém o ponto médio  $E$  do arco  $AC$  que não contém  $B$ .



Note-se que  $E\widehat{AM} = E\widehat{AC} = E\widehat{NC} = A\widehat{NE}$ . Então a recta  $EA$  é tangente à circunferência circunscrita a  $[MAN]$ , por Arco Capaz Degenerado. Assim,  $\overline{EA}^2 = \overline{EM} \cdot \overline{EN}$ .

Aqui é que entra o nosso facto aleatório. Temos  $\overline{EA} = \overline{EI}$ , logo temos  $\overline{EI}^2 = \overline{EM} \cdot \overline{EN}$ , e, portanto,  $EI$  é tangente à circunferência circunscrita a  $[MIN]$ ! Assim temos  $E\widehat{IM} = I\widehat{NM}$ , e, também,  $I\widehat{ME} = E\widehat{IN}$ . Portanto,  $\pi - I\widehat{ME} = \pi - E\widehat{IN}$ , ou seja,  $N\widehat{MI} = N\widehat{IB}$ . Mas  $I\widehat{BN} = E\widehat{BN} = \frac{\pi}{2}$  (note-se que  $[EN]$  é um diâmetro da circunferência circunscrita) e portanto  $I\widehat{NB} = \frac{\pi}{2} - N\widehat{IB} = \frac{\pi}{2} - N\widehat{MI} = I\widehat{MA}$ , já que  $MN$  é a mediatriz de  $[AC]$ , e isto conclui o problema.

Voltemos ao desenho do Teorema 2.1. Pelo Teorema, os pontos  $B, C, I, J$  estão sobre uma circunferência de centro em  $M$ . O próximo Lema diz-nos algo mais de interessante sobre esta circunferência.

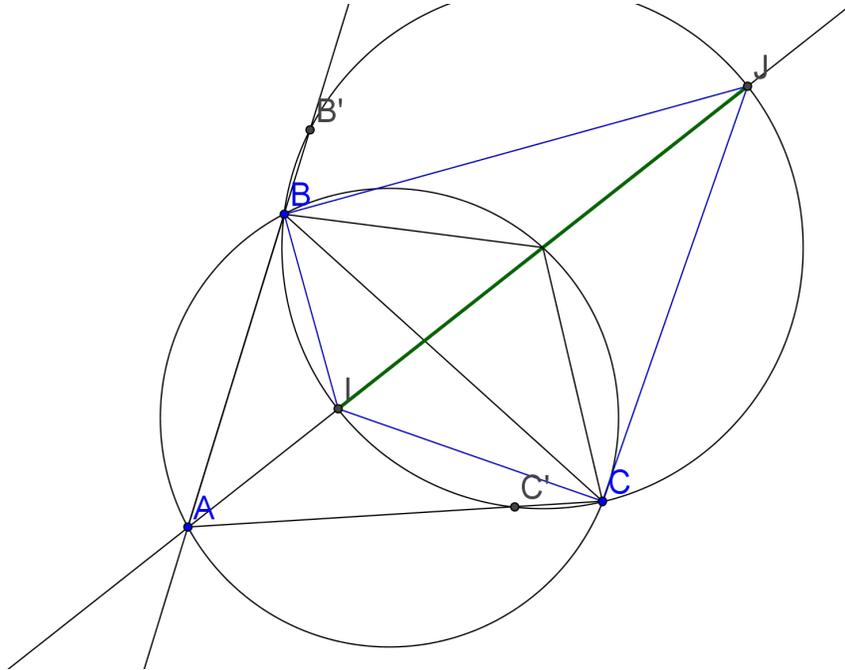
**Lema 2.2.** *A circunferência circunscrita ao quadrilátero  $[CIJB]$  intersecta a recta  $AB$  num ponto  $B'$  tal que  $\overline{AB'} = \overline{AC}$ . Analogamente, intersecta a recta  $AC$  num ponto  $C'$  tal que  $\overline{AC'} = \overline{AB}$ .*

*Demonstração.* Tem-se  $C\widehat{IB} = \pi - (I\widehat{BC} + B\widehat{CI}) = \pi - \frac{A\widehat{BC} + B\widehat{CA}}{2} = \pi - \frac{\pi - C\widehat{AB}}{2}$ , logo  $A\widehat{B'}C} = \frac{\pi - C\widehat{AB}}{2}$ , de onde segue que  $\overline{AB'} = \overline{AC}$ . A igualdade  $\overline{AC'} = \overline{AB}$  é análoga.  $\square$

Note-se ainda a seguinte consequência do Lema:

**Facto 2.3.** *Tem-se  $\overline{AI} \cdot \overline{AJ} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema das Cordas,  $\overline{AI} \cdot \overline{AJ} = \overline{AB} \cdot \overline{AB'} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ .  $\square$



O facto anterior equivale a dizer que uma inversão de centro  $A$  e raio  $\sqrt{bc}$  troca os pontos  $I$  e  $J$ .

Agora, alguns problemas:

**Problema 7** (IMO 2006). *Seja  $[ABC]$  um triângulo com incentro  $I$ . Um ponto  $P$  no interior de  $[ABC]$  satisfaz*

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

*Prova que  $\overline{AP} \geq \overline{AI}$ , com igualdade se, e somente se,  $P = I$ .*

**Problema 8** (IMO 2010). *Dado um triângulo  $[ABC]$ , com incentro  $I$  e circunferência circunscrita  $\Gamma$ ,  $AI$  intersecta  $\Gamma$  novamente em  $D$ . Seja  $E$  um ponto no arco  $BDC$ , e seja  $F$  um ponto no segmento  $[BC]$ , tais que*

$$\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \frac{1}{2} \cdot \widehat{BAC}.$$

*Seja  $G$  o ponto médio de  $[IF]$ . Prova que o ponto de intersecção das rectas  $EI$  e  $DG$  pertence a  $\Gamma$ .*

**Problema 9** (ELMO 2010). *Seja  $[ABC]$  um triângulo inscrito numa circunferência  $\Omega$ , e sejam  $I$  e  $I_A$  o incentro de  $[ABC]$  e o excentro de  $[ABC]$  oposto ao vértice  $A$ , respectivamente. A circunferência inscrita em  $[ABC]$  é tangente a  $[BC]$  em  $D$  e a circunferência ex-inscrita de  $[ABC]$  oposta ao vértice  $A$  é tangente a  $[BC]$  em  $E$ . Uma circunferência é tangente a  $BC$  em  $D$  e ao arco  $BC$  de  $\Omega$  que contém  $A$  em  $T$ . Seja  $S \neq T$  o ponto de intersecção de  $TI$  com  $\Omega$ . Sendo  $M$  o ponto médio do arco  $BC$  de  $\Omega$  que não contém  $A$ , prova que o ponto de intersecção de  $ME$  e  $SI_A$  pertence a  $\Omega$ .*

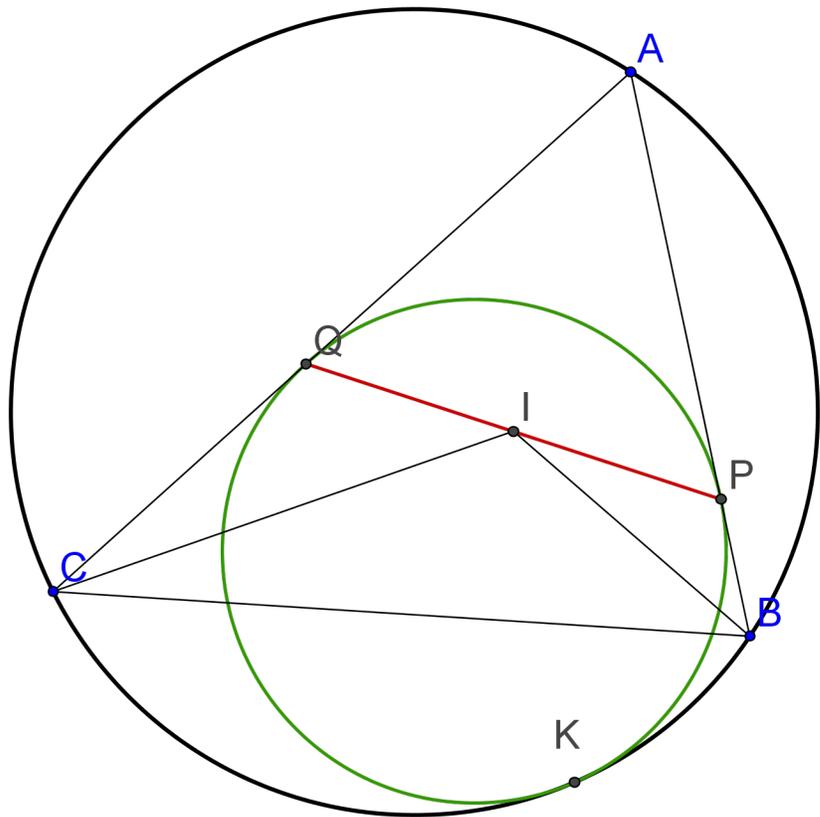
**Problema 10** (IMO Shortlist 2007). *Seja  $[ABC]$  um triângulo acutângulo e sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  as amplitudes dos seus ângulos internos em  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente; suponhamos que  $\beta > \gamma$ . Seja  $I$  o seu incentro, e seja  $R$  o raio da sua circunferência circunscrita. O ponto  $D$  é o pé da altura traçada por  $A$ . O ponto  $K$  está na recta  $AD$  e é tal que  $\overline{AK} = 2R$  e  $D$  separa os pontos  $A$  e  $K$ . As rectas  $DI$  e  $KI$  intersectam os lados  $[AC]$  e  $[BC]$  nos pontos  $E$  e  $F$ , respectivamente. Supõe que  $\overline{IE} = \overline{IF}$ .*

*Prova que  $\beta \leq 3\gamma$ .*

### 3 Circunferências tangentes à circunferência circunscrita

Consideremos uma circunferência tangente aos lados  $[AB]$  e  $[AC]$  do triângulo  $[ABC]$ , e também tangente à sua circunferência circunscrita. Onde está o seu centro? Onde é que “ficam” os seus pontos de tangência com os lados  $[AB]$  e  $[AC]$ ? O próximo teorema permitir-nos-á responder a esta questão.

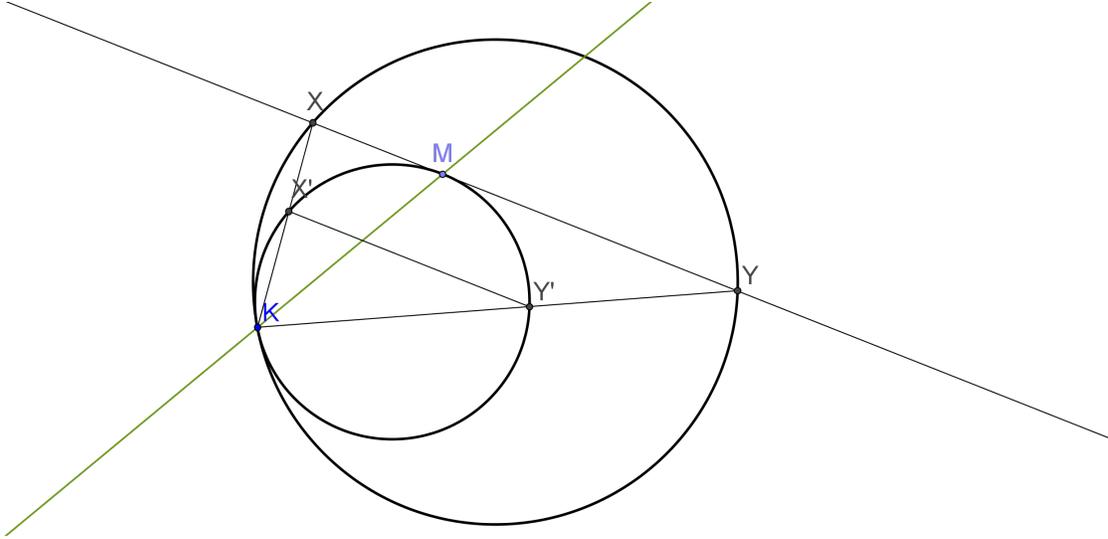
**Teorema 3.1.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo com incentro  $I$  e circunferência circunscrita  $\Gamma$ . Seja  $\omega$  uma circunferência que é tangente a  $[AB]$  e  $[AC]$  nos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente, e que também é tangente a  $\Gamma$ . Então  $I$  é o ponto médio de  $[PQ]$ .*



Antes de provarmos este teorema, vamos provar um Lema auxiliar, que é, aliás, muito útil em vários problemas.

**Lema 3.2.** *Sejam  $\Gamma$  e  $\omega$  duas circunferências tangentes no ponto  $K$ . Uma recta tangente a  $\omega$  em  $M$  intersecta  $\Gamma$  em  $X$  e  $Y$ . Então  $KM$  é a bissetriz do ângulo  $\angle YKX$ .*

*Demonstração.* Sejam  $X'$  e  $Y'$  as segundas intersecções de  $KX$  e  $KY$ , respectivamente, com  $\omega$ . Observe-se que  $K$  é o centro da homotetia que envia  $\omega$  em  $\Gamma$ , e, portanto,  $X'Y'$  é paralela a  $XY$ .



Assim, por simetria, como  $XY$  é tangente a  $\omega$  em  $M$ ,  $M$  é o ponto médio do arco  $X'Y'$  de  $\omega$ . Logo,  $KM$  é a bissectriz do ângulo  $\angle Y'KX'$ , ou seja, do ângulo  $\angle YKX$ .  $\square$

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema 3.1.

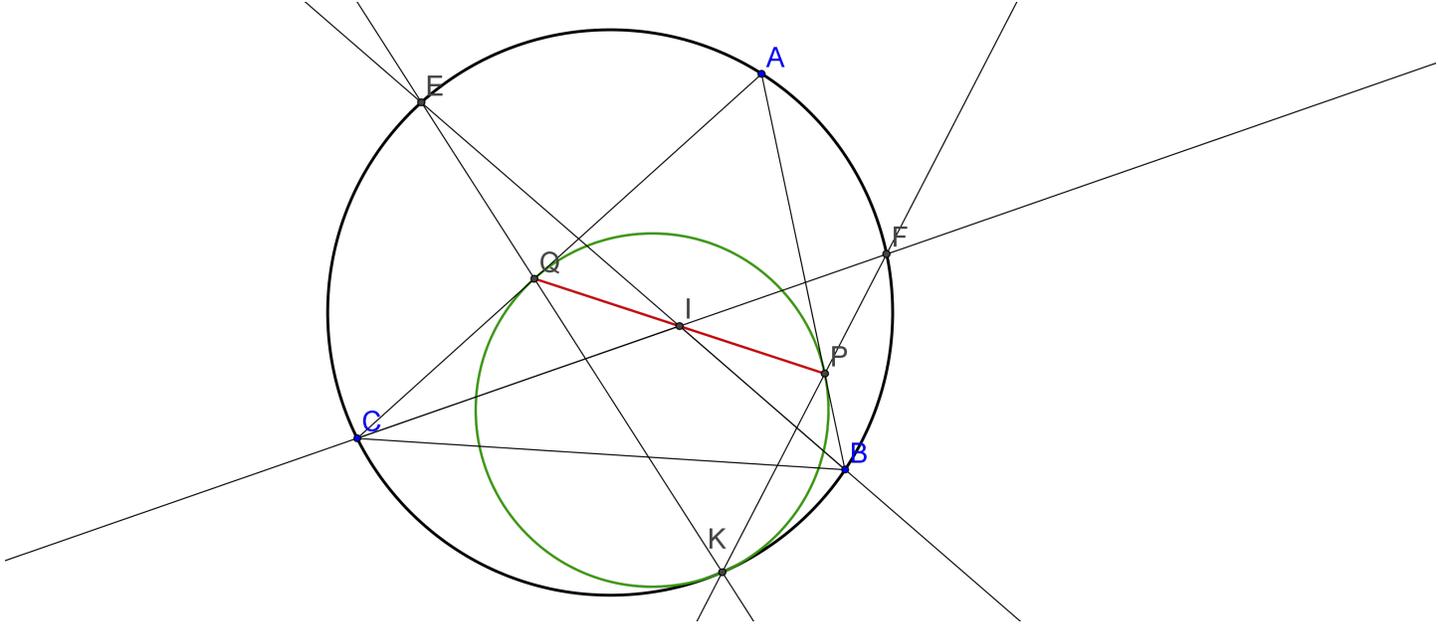
*Demonstração.* Seja  $K$  o ponto de tangência de  $\omega$  e  $\Gamma$  e sejam  $E$  e  $F$  as segundas intersecções de  $KQ$  e  $KP$ , respectivamente, com  $\Gamma$ . Do Lema anterior decorre que  $E$  e  $F$  são os pontos médios dos arcos  $AC$  e  $AB$ , respectivamente; logo as rectas  $BI$  e  $CI$  passam por  $E$  e  $F$ , respectivamente. Então, pelo Teorema de Pascal no hexágono  $[EKFCAB]$ , temos que  $P$ ,  $Q$  e  $I$  são colineares. O facto de  $I$  ser o ponto médio de  $[PQ]$  decorre agora de uma simetria trivial (note-se que  $\overline{AP} = \overline{AQ}$  e  $AI$  é a bissectriz de  $\angle QAP$ ).  $\square$

Vamos ainda destacar algumas propriedades interessantes desta configuração. Temos que os quadriláteros  $[PBKI]$  e  $[CQIK]$  são cíclicos; uma vez provado o Teorema 3.1, não é difícil prová-lo com algum angle-chasing. Além disso, desta ciclicidade decorre que  $B\hat{K}I = A\hat{P}I$ ; e analogamente,  $I\hat{K}C = I\hat{Q}A$ . Como  $A\hat{P}I = I\hat{Q}A$ , isto implica  $B\hat{K}I = I\hat{K}C$ , ou seja,  $KI$  é a bissectriz de  $\angle BKC$ . Logo,  $KI$  passa pelo ponto médio do arco  $BAC$ .

A título de curiosidade, vamos apresentar uma demonstração alternativa do Teorema 3.1 baseada nesta ciclicidade. Para seguir a demonstração que vamos apresentar, é necessário algum à-vontade com ângulos orientados<sup>1</sup>.

*Demonstração.* Vamos definir alternativamente  $P$  e  $Q$  como as intersecções da perpendicular a  $AI$  por  $I$  com  $[AB]$  e  $[AC]$ , respectivamente, e definir  $K$  como a intersecção, diferente de  $I$ , das circunferências circunscritas a  $[BIP]$  e  $[QIC]$ . Definimos  $\omega$  como a circunferência tangente a  $AB$  e

<sup>1</sup>Ver Apêndice A.



$AC$  em  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Vamos provar que  $K$  pertence a  $\omega$  e a  $\Gamma$  e que as duas circunferências são tangentes em  $K$ .

Temos  $\angle(BK, CK) = \angle(BK, IK) + \angle(IK, CK) = \angle(BP, IP) + \angle(IQ, CQ) = \angle(AP, PQ) + \angle(PQ, AQ) = \angle(AP, AQ) = \angle(BA, CA)$ , logo  $A, B, C$  e  $K$  são concíclicos e assim  $K \in \Gamma$ .

Por outro lado,  $\angle(PK, QK) = \angle(PK, IK) + \angle(IK, QK) = \angle(PB, IB) + \angle(IC, QC) = \angle(AP, PQ)$  (a última igualdade é fácil de provar com angle-chasing). Assim, por Arco Capaz Degenerado,  $AP$  é tangente à circunferência circunscrita a  $[QPK]$ , logo  $K \in \omega$ .

Agora note-se que  $\angle(QP, KP) - \angle(CB, KB) = \angle(IP, CP) - \angle(CB, KB) = \angle(IB, KB) - \angle(CB, KB) = \angle(IB, CB) = \angle(QI, CI) = \angle(QK, CK)$  (a penúltima igualdade é fácil de obter).

Seja agora  $l_1$  a recta tangente a  $\Gamma$  em  $K$  e seja  $l_2$  a recta tangente a  $\omega$  em  $K$ . Então, por Arco Capaz Degenerado,  $\angle(CK, l_1) = \angle(CB, KB)$  e  $\angle(QK, l_2) = \angle(QP, KP)$ , logo temos  $\angle(QK, l_2) - \angle(CK, l_1) = \angle(QK, CK)$ , pelo que  $l_1 = l_2$ ; assim  $\Gamma$  e  $\omega$  são ambas tangentes a  $l_1 = l_2$  em  $K$  e assim são também tangentes entre si em  $K$ .  $\square$

Vejamos por fim uma caracterização diferente destas circunferências e que pode por vezes oferecer uma forma simples de abordar problemas relacionados.

**Lema 3.3.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo com circunferência circunscrita  $\Gamma$ . Seja  $\omega_A$  a circunferência excrita relativa ao vértice  $A$ , e seja  $\omega$  a circunferência tangente a  $[AB], [AC]$  que também é tangente a  $\Gamma$ . Então uma inversão com centro em  $A$  e raio  $\sqrt{AB \cdot AC}$  troca  $\omega_A$  com  $\omega$ .*

*Demonstração.* Sejam  $B'$  e  $C'$  os inversos de  $B$  e  $C$  relativamente a esta inversão. Então  $\Gamma$  é enviada para a recta  $B'C'$ . Como  $\omega$  é internamente tangente a  $\Gamma$ ,  $\omega$  é enviada para uma circunferência tangente a  $B'C'$ , estando do lado oposto a  $A$  relativamente a essa recta; além disso,  $\omega$  é tangente a

$AB$  e  $AC$ , pois estas rectas são enviadas para elas próprias pela inversão, logo a imagem de  $\omega$  é o A-excírculo de  $[AB'C']$ . Por outro lado, como pela definição de inversão temos  $\overline{AB} \cdot \overline{AB'} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ,  $\overline{AB'} = \overline{AC}$ , e analogamente  $\overline{AB} = \overline{AC'}$ . Mas assim é claro que uma reflexão pela bissectriz de  $\angle BAC$  envia  $[BC]$  em  $[C'B']$ ; daqui, por simetria temos evidentemente que  $\omega_A$  também é tangente a  $B'C'$ , pelo que  $\omega_A$  é o A-excírculo de  $[AB'C']$ , como queríamos.  $\square$

Vamos então aproveitar para exibir uma terceira prova do teorema inicial baseada neste lema.

*Demonstração.* Considere-se uma inversão com centro em  $A$  e raio  $\sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}$ . Pelo lema anterior, os pontos  $P, Q$  são enviados para pontos  $P', Q'$  que são os pontos de tangência do A-excírculo com  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Por outro lado, por 2.3 sabemos que o incentro  $I$  é enviado para o excentro  $J$  por esta inversão. Uma vez que  $\angle AP'J = \angle AQ'J = \frac{\pi}{2}$ ,  $[AP'JQ']$  é cíclico, logo  $P, I, Q$  são colineares, e daí concluímos que  $I$  é o ponto médio de  $[PQ]$  como na primeira solução.  $\square$

Agora, os problemas: o primeiro problema que vamos apresentar não está realmente relacionado com este assunto, mas o ponto  $J$  poderá ser familiar a quem leu esta secção.

**Problema 11** (Ibero 2009). *Dado um triângulo  $[ABC]$  com incentro  $I$ , seja  $P$  a segunda intersecção da bissectriz externa de  $\angle A$  e da circunferência circunscrita a  $[ABC]$ , e seja  $J$  a segunda intersecção de  $PI$  com essa circunferência. Mostra que as circunferências circunscritas a  $[JIB]$  e  $[JIC]$  são tangentes a  $IC$  e  $IB$  respectivamente.*

**Problema 12** (EGMO 2013). *Seja  $\Omega$  a circunferência circunscrita ao triângulo  $[ABC]$ . A circunferência  $\omega$  é tangente aos lados  $[AC]$  e  $[BC]$ , e é internamente tangente a  $\Omega$  no ponto  $P$ . Uma recta paralela a  $AB$  que intersecta o interior de  $[ABC]$  é tangente a  $\omega$  em  $Q$ .*

*Mostra que  $A\hat{C}P = Q\hat{C}B$ .*

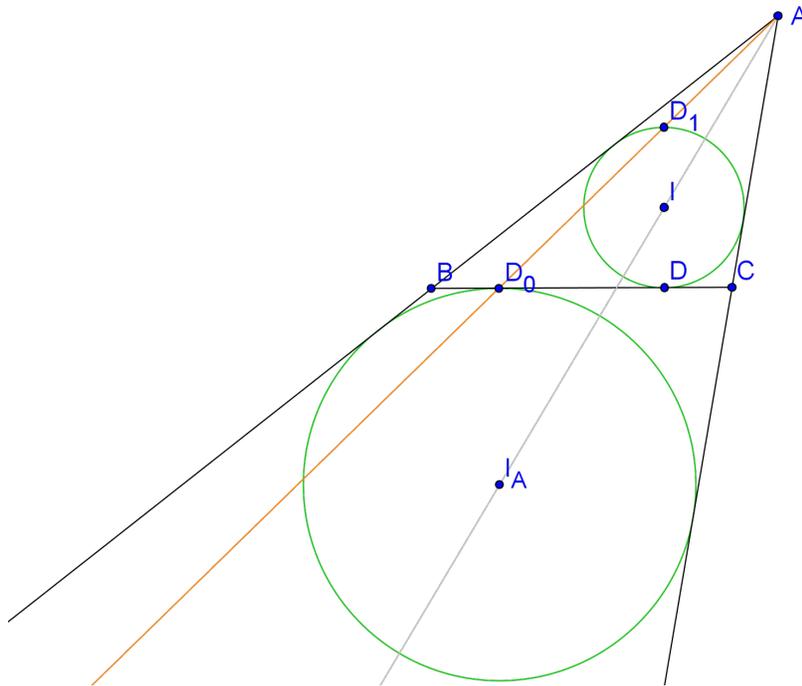
**Problema 13** (Rússia 2013). *Seja  $\omega$  a circunferência inscrita no triângulo  $[ABC]$ , com incentro  $I$ . Seja  $\Gamma$  a circunferência circunscrita ao triângulo  $[AIB]$ . As circunferências  $\omega$  e  $\Gamma$  intersectam-se nos pontos  $X$  e  $Y$ . Seja  $Z$  o ponto de intersecção das tangentes comuns a  $\omega$  e a  $\Gamma$ .*

*Mostra que a circunferência circunscrita ao triângulo  $[XYZ]$  é tangente à circunferência circunscrita a  $[ABC]$ .*

## 4 Fenómeno Homotético Circular

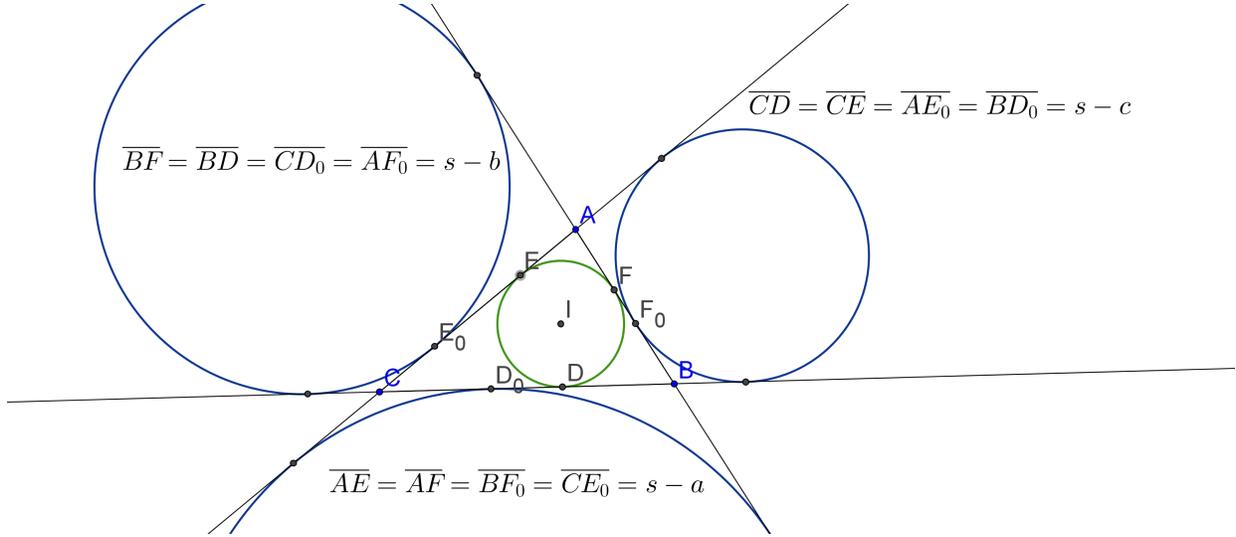
O Fenómeno Homotético Circular (por vezes referido como Lema do Incírculo) é uma interessante colinearidade que envolve pontos de tangência das circunferências inscritas e excritas. Vamos conhecer este resultado.

**Teorema 4.1** (Fenómeno Homotético Circular). *Seja  $[ABC]$  um triângulo. Sejam  $D$  o ponto de tangência da circunferência inscrita no lado  $[BC]$ ,  $D_0$  o ponto de tangência da  $A$ -circunferência excrita no mesmo lado, e seja  $D_1$  o ponto diametralmente oposto a  $D$  na circunferência inscrita. Então  $A$ ,  $D_1$  e  $D_0$  são colineares.*



*Demonstração.* A prova é quase “trivial”: sejam  $B_1$  e  $C_1$  as intersecções da recta paralela a  $BC$  por  $D_1$  com  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Então a circunferência inscrita em  $[ABC]$  é a  $A$ -circunferência excrita em  $[AB_1C_1]$ ; e  $D_1$  é o ponto de tangência dessa circunferência com o lado  $[B_1C_1]$ . Logo, a homotetia de centro  $A$  que envia  $[AB_1C_1]$  em  $[ABC]$  envia  $D_1$  em  $D$ , pelo que  $A$ ,  $D_1$  e  $D$  são colineares, como pretendido.  $\square$

Nunca é demais relembrar algumas propriedades interessantes desta configuração: por exemplo,  $\overline{BD_0} = \overline{CD} = s - c$ , onde  $s = \frac{a+b+c}{2}$  é o semiperímetro de  $[ABC]$ .



Agora, alguns problemas:

**Problema 14** (IMO 1992). *No plano, considerem-se uma circunferência  $C$ , uma recta  $l$  tangente a  $C$  e um ponto  $M$  em  $l$ . Determina o lugar geométrico dos pontos  $P$  com a seguinte propriedade: existem pontos  $Q$  e  $R$  em  $l$  tais que  $M$  é o ponto médio de  $[QR]$  e  $C$  é a circunferência inscrita no triângulo  $[PQR]$ .*

**Problema 15** (IMO Shortlist 2005). *Seja  $[ABC]$  um triângulo tal que  $\overline{AB} + \overline{BC} = 3\overline{AC}$ . A sua circunferência inscrita é tangente a  $[AB]$  e  $[BC]$  em  $D$  e  $E$ , respectivamente. Sejam  $K$  e  $L$  os pontos diametralmente opostos a  $D$  e  $E$ , respectivamente. Prova que o quadrilátero  $[ACKL]$  é cíclico.*

**Problema 16** (USAMO 1999). *Seja  $[ABCD]$  um trapézio isósceles com  $AB$  paralela a  $CD$ . Seja  $\omega$  a circunferência inscrita no triângulo  $[BCD]$ , que é tangente a  $CD$  em  $E$ . Seja  $F$  um ponto na bissetriz interna do ângulo  $\angle DAC$  tal que  $EF \perp CD$ . A circunferência circunscrita ao triângulo  $[ACF]$  intersecta a recta  $CD$  num ponto  $G \neq C$ . Prova que o triângulo  $[AFG]$  é isósceles.*

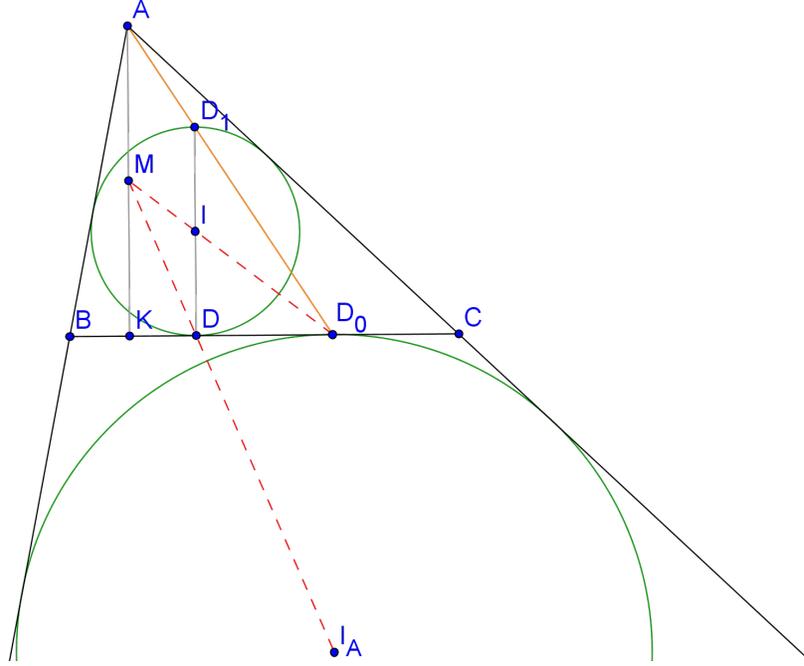
**Problema 17** (Torneio das Cidades 2003). *Seja  $[ABC]$  um triângulo com incentro  $I$ , circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$ . A circunferência inscrita em  $[ABC]$  é tangente a  $[BC]$  em  $K$ . Mostra que se as rectas  $IO$  e  $BC$  são paralelas, então as rectas  $AO$  e  $HK$  são paralelas.*

**Problema 18** (OMCPLP 2013). *Considera um triângulo  $[ABC]$ . Seja  $\mathcal{S}$  a circunferência que tangencia internamente os lados  $[BC]$ ,  $[CA]$  e  $[AB]$  do triângulo nos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente. Externamente ao triângulo constroem-se três circunferências  $S_A$ ,  $S_B$  e  $S_C$ . A circunferência  $S_A$  é tangente a  $BC$  no ponto  $L$  e aos prolongamentos das retas  $AB$  e  $AC$ , nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. A circunferência  $S_B$  é tangente a  $AC$  no ponto  $E$  e ao prolongamento da reta  $BC$  no ponto  $P$ . A circunferência  $S_C$  é tangente a  $AB$  no ponto  $F$  e ao prolongamento da reta  $BC$  no ponto  $Q$ . Prove que as retas  $EP$ ,  $FQ$  e  $AL$  são concorrentes em um único ponto sobre  $\mathcal{S}$ .*

## 5 Ponto Médio da Altura

Esta secção é dedicada a duas colinearidades envolvendo o ponto médio da altura que são úteis em alguns problemas.

**Lema 5.1.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $M$  o ponto médio da sua  $A$ -altura. Seja  $D$  o ponto no qual o incírculo tangencia  $BC$ , e  $D_0$  o ponto no qual o  $A$ -excírculo tangencia  $BC$ . Sejam ainda  $I$  e  $I_A$  o incentro e  $A$ -excentro de  $[ABC]$ , respectivamente. Então  $M, D_0, I$  e  $M, D, I_A$  são colineares.*



*Demonstração.* Seja  $K$  o pé da  $A$ -altura,  $D_1$  o ponto diametralmente oposto a  $D$  relativamente ao incírculo e  $D_2$  o ponto diametralmente oposto a  $D_0$  relativamente ao  $A$ -excírculo. Pelo Fenómeno Homotético Circular sabemos que  $A, D_1, D_0$  são colineares. Além disso, uma vez que  $BC$  tangencia o incírculo em  $D$ ,  $D_1D \perp BC \perp AK$ , logo  $D_1D \parallel AK$ , e portanto uma homotetia com centro em  $D_0$  envia  $[D_1D]$  em  $[AK]$ . Como tal, esta homotetia envia  $I$  em  $M$ , pois estes são os pontos médios de  $[D_1D]$  e  $[AK]$ , respectivamente, provando a primeira colinearidade. A segunda é provada analogamente utilizando que  $A, D, D_2$  são colineares e realizando uma homotetia (inversa) com centro em  $D$ .  $\square$

Passamos a alguns problemas relacionados com o ponto médio da altura:

**Problema 19** (TST Vietnam 2003). *Seja  $[ABC]$  um triângulo escaleno com circuncentro  $O$  e incentro  $I$ . Seja  $H, K, L$  os pés das alturas de  $[ABC]$  relativas a  $A, B, C$ , respectivamente. Denotamos por  $A_0, B_0, C_0$  os pontos médios das alturas  $[AH], [BK]$  e  $[CL]$ , respectivamente.  $O$*

incírculo de  $[ABC]$  tangencia  $BC, CA, AB$  em  $D, E, F$ , respectivamente. Mostra que as quatro rectas  $A_0D, B_0E, C_0F$  e  $OI$  concorrem num ponto.

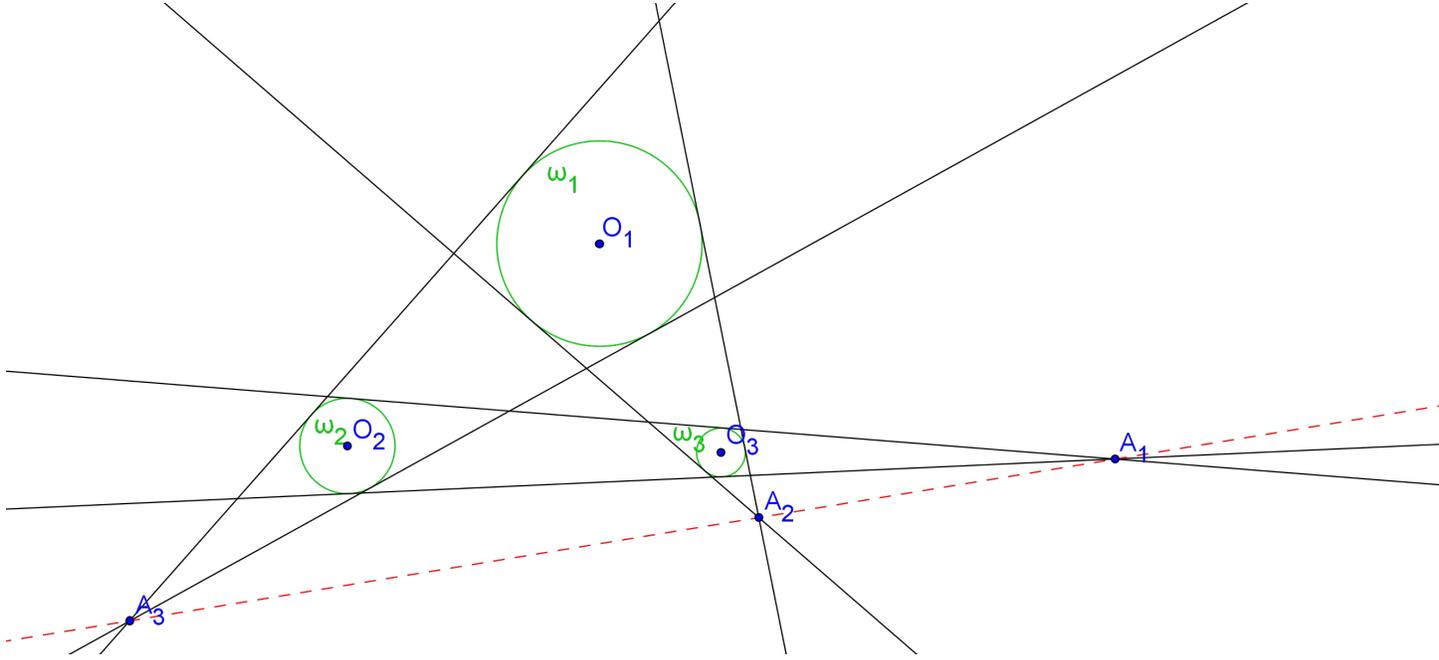
**Problema 20** (TST Irão 2009). Num triângulo  $[ABC]$ ,  $D, E$  e  $F$  são os pontos de tangência do incírculo (com centro em  $I$ ) com  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. Seja  $M$  o pé da perpendicular de  $D$  em  $EF$ .  $P$  é um ponto em  $DM$  tal que  $\overline{DP} = \overline{MP}$ . Se  $H$  é o ortocentro de  $[BIC]$ , prova que  $PH$  passa pelo ponto médio de  $[EF]$ .

**Problema 21** (IMO Shortlist 2002). O incírculo  $\Omega$  de um triângulo acutângulo  $[ABC]$  é tangente ao seu lado  $BC$  no ponto  $K$ . Seja  $AD$  a altura do triângulo  $[ABC]$  relativa a  $A$  e  $M$  o ponto médio de  $[AD]$ . Se  $N$  é o ponto comum à circunferência  $\Omega$  e à recta  $KM$  diferente de  $K$ , prova que  $\Omega$  é tangente ao circuncírculo de  $[BCN]$  no ponto  $N$ .

## 6 Monge D'Alembert

Este trata-se de um teorema simples, elegante e útil em vários problemas de olimpíadas.

**Teorema 6.1** (Monge D'Alembert). *Sejam  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  três circunferências. Seja  $A_1$  a intersecção das tangentes externas comuns a  $\omega_2$  e  $\omega_3$ ,  $A_2$  a intersecção das tangentes externas comuns a  $\omega_3$  e  $\omega_1$  e  $A_3$  a intersecção das tangentes externas comuns a  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Então  $A_1, A_2$  e  $A_3$  são colineares.*



*Demonstração.* Sejam  $O_1, O_2, O_3$  os centros de  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , respectivamente, e  $r_1, r_2, r_3$  os seus raios. O ponto  $A_1$  é simplesmente o centro da homotetia directa (com factor  $\frac{r_3}{r_2}$ ) que envia  $\omega_2$  em  $\omega_3$ ; em particular, tal homotetia envia  $O_2$  em  $O_3$ , logo  $A_1$  está em  $O_1O_2$  e  $\frac{\overrightarrow{O_3A_1}}{\overrightarrow{A_1O_2}} = -\frac{r_3}{r_2}$ . Com resultados análogos, temos

$$\frac{\overrightarrow{O_3A_1}}{\overrightarrow{A_1O_2}} \frac{\overrightarrow{O_2A_3}}{\overrightarrow{A_3O_1}} \frac{\overrightarrow{O_1A_2}}{\overrightarrow{A_2O_3}} = \left(-\frac{r_3}{r_2}\right) \left(-\frac{r_2}{r_1}\right) \left(-\frac{r_1}{r_3}\right) = -1.$$

Assim, de acordo com o Teorema de Menelaus no triângulo  $[O_1O_2O_3]$ , tem-se o pretendido.  $\square$

Existem outras provas elegantes, com o Teorema de Desargues ou com geometria tridimensional. Vamos esboçar a segunda alternativa; consideramos as esferas que têm como equador as circunferências  $\omega_1, \omega_2$  e  $\omega_3$ ; os pontos  $A_1, A_2, A_3$  vão ser colineares na recta que resulta da intersecção dos dois planos externamente tangentes às três circunferências (porquê?).

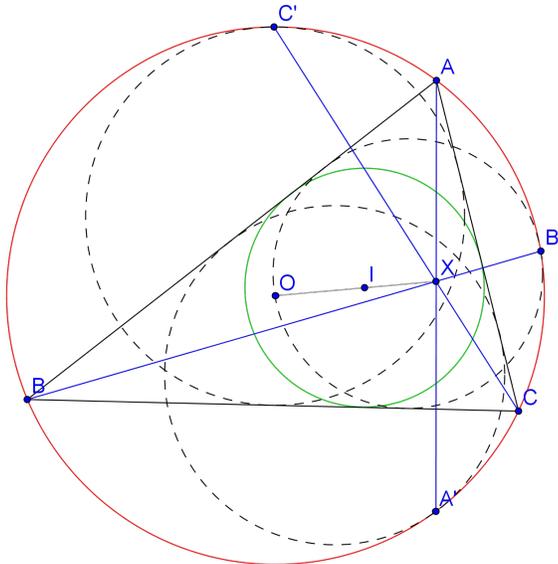
A prova que demos pode ser adaptada para uma ligeira variação do teorema.

**Teorema 6.2** (Monge D'Alembert 1-2). *Sejam  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  três circunferências. Seja  $A_1$  a intersecção das tangentes externas comuns a  $\omega_2$  e  $\omega_3$ ,  $A_2$  a intersecção das tangentes internas comuns a  $\omega_3$  e  $\omega_1$  e  $A_3$  a intersecção das tangentes internas comuns a  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Então  $A_1, A_2$  e  $A_3$  são colineares.*

Existe uma interpretação interessante do Teorema de Monge D'Alembert. A intersecção das tangentes externas (internas) a duas circunferências é o centro da homotetia directa (inversa) que envia uma na outra. Assim, uma homotetia directa com centro em  $A_1$  envia  $\omega_2$  em  $\omega_3$  e uma homotetia directa com centro em  $A_2$  envia  $\omega_3$  em  $\omega_1$ . O facto interessante é que a composição de duas homotetias é uma homotetia com centro colinear com os centros das duas primeiras (e isso pode ser provado também com Menelaus, por exemplo)! Ou seja, o centro da composição destas duas homotetias está em  $A_1A_2$ ; mas essa é uma homotetia directa que envia  $\omega_2$  em  $\omega_1$ , logo tem centro em  $A_3$ . A segunda versão é a mesma coisa, apenas devemos notar que a composição de uma homotetia directa e uma homotetia inversa é uma homotetia inversa. Assim, mesmo quando não existem tangentes comuns a duas circunferências (nomeadamente quando uma está contida no interior da outra), se falarmos em centros de homotetias o teorema continua a ser verdade, como podemos verificar analisando a sua prova.

Vamos agora provar uma propriedade relacionada com uma configuração anterior para ilustrar uma aplicação do Teorema de Monge D'Alembert.

**Teorema 6.3.** *Seja  $[ABC]$  com incentro  $I$  e circuncentro  $O$ . Seja  $\omega_A$  a circunferência tangente a  $AB, AC$  e tangente internamente ao circuncírculo de  $[ABC]$  num ponto  $A'$ . Analogamente definimos  $\omega_B, \omega_C, B'$  e  $C'$ . Então as rectas  $AA', BB'$  e  $CC'$  concorrem em  $IO$ .*



*Demonstração.* Seja  $\omega$  o incírculo de  $[ABC]$  e  $\Gamma$  o circuncírculo. Como  $\Gamma$  e  $\omega_A$  são tangentes internamente em  $A'$ , uma homotetia directa centrada em  $A'$  envia  $\omega_A$  em  $\Gamma$ . Além disso, como  $A$  é a intersecção das tangentes externas comuns a  $\omega_A$  e  $\omega$ ,  $A$  é o centro da homotetia directa que envia  $\omega$  em  $\omega_A$ . Assim, podemos aplicar o Teorema de Monge D'Alembert, que nos diz que  $A, A'$  e o centro da homotetia directa entre  $\omega$  e  $\Gamma$  são colineares. Mas isso diz-nos que  $AA', BB'$  e  $CC'$  todas passam pelo centro da homotetia directa entre  $\omega$  e  $\Gamma$ , que está evidentemente em  $IO$  já que  $I$  é o centro de  $\omega$  e  $O$  é o centro de  $\Gamma$ .  $\square$

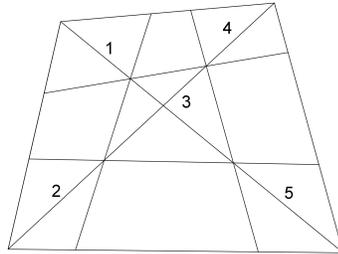
De seguida temos vários problemas em que este Teorema pode ser útil em certo ponto.

**Problema 22** (Circunferências de Malfatti). *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$  três circunferências tais que  $\Gamma_A$  é tangente  $AB$  e  $AC$ ,  $\Gamma_B$  é tangente  $BC$  e  $BA$ ,  $\Gamma_C$  é tangente  $AB$  e  $AC$ ,  $\Gamma_C$  é tangente externamente a  $\Gamma_B$  em  $D$ ,  $\Gamma_A$  é tangente externamente a  $\Gamma_C$  em  $E$  e  $\Gamma_B$  é tangente externamente a  $\Gamma_A$  em  $F$ . Prova que  $AD, BE, CF$  são concorrentes.*

**Problema 23** (IMO Shortlist 2007). *Um ponto  $P$  está no lado  $[AB]$  de um quadrilátero convexo  $[ABCD]$ . Seja  $\omega$  o incírculo de  $[CPD]$  e  $I$  o seu incentro. Suponha-se que  $\omega$  é tangente aos incírculos de  $[APD]$  e  $[BPC]$  em  $K$  e  $L$ , respectivamente. Seja  $E = AC \cap BD$  e  $F = AK \cap BL$ . Mostra que os pontos  $E, I, F$  são colineares.*

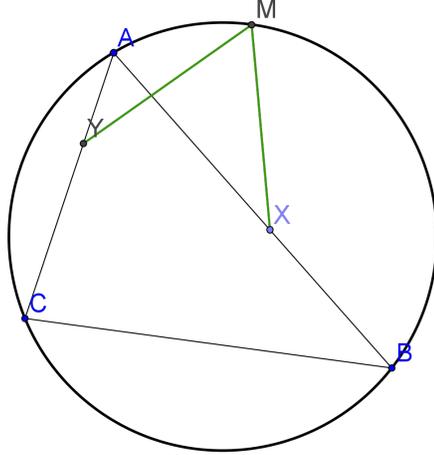
**Problema 24** (Irão). *Sejam  $\omega$  e  $\Gamma$  o incírculo e circuncírculo de um triângulo  $[ABC]$ , respectivamente. O incírculo  $\omega$  toca  $BC, CA$  e  $AB$  em  $D, E, F$ , respectivamente. As três circunferências  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  tangenciam  $\omega$  em  $D, E, F$ , respectivamente, e  $\Gamma$  em  $K, L, M$ , respectivamente. Mostra que  $DK, EL, FM$  concorrem num ponto  $P$  tal que o ortocentro de  $[DEF]$  está na recta  $OP$  onde  $O$  é o circuncentro de  $[ABC]$ .*

**Problema 25** (Zhautykov 2014). *Um quadrilátero convexo é dividido por quatro segmentos em nove quadriláteros como indicado na figura. Os pontos de intersecção dos segmentos que dividem o quadrilátero estão nas diagonais do mesmo. Suponha-se que cada um dos quadriláteros 1, 2, 3 e 4 tem uma circunferência tangente aos seus lados. Mostra que existe uma circunferência tangente aos lados do quadrilátero 5.*



## 7 Uma congruência com pontos médios de arcos

**Teorema 7.1.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo, e sejam  $X$  e  $Y$  pontos nos lados  $[AB]$  e  $[AC]$ , respectivamente, tais que  $\overline{BX} = \overline{CY}$ . Seja  $M$  o ponto médio do arco  $CAB$  da circunferência circunscrita. Então  $\overline{MX} = \overline{MY}$ .*



*Demonstração.* Observe-se que  $M\hat{B}X = M\hat{C}Y$ ,  $\overline{MB} = \overline{MC}$  e  $\overline{BX} = \overline{CY}$ . Logo os triângulos  $[MBX]$  e  $[MCY]$  são congruentes, pelo que  $\overline{MX} = \overline{MY}$ .  $\square$

É ainda de notar que, pela congruência referida,  $B\hat{X}M = C\hat{Y}M$ , logo  $M\hat{X}A = M\hat{Y}A$  e assim  $[XYAM]$  é cíclico. Ou seja,  $M$  é o centro da roto-homotetia que envia  $[BC]$  em  $[XY]$ .

Estes factos podem ser úteis nos próximos problemas.

**Problema 26** (Rússia 2005). *Seja  $[ABC]$  um triângulo e sejam  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  os pontos de tangência das circunferências excritas opostas a  $A$ ,  $B$  e  $C$  com os lados  $[BC]$ ,  $[CA]$  e  $[AB]$ , respectivamente. As circunferências circunscritas aos triângulos  $[AB'C']$ ,  $[A'BC']$  e  $[A'B'C]$  intersectam a circunferência circunscrita a  $[ABC]$  nos pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ , respectivamente. Prova que o triângulo  $[A_1B_1C_1]$  é semelhante ao triângulo formado pelos pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados de  $[ABC]$ .*

**Problema 27** (EGMO 2014). *Seja  $[ABC]$  um triângulo tal que  $[BC]$  é o menor lado, e sejam  $D$  e  $E$  pontos nos segmentos  $[AB]$  e  $[AC]$ , respectivamente, tais que  $\overline{BD} = \overline{BC} = \overline{CE}$ . As retas  $CD$  e  $BE$  concorrem em  $F$ . Prova que o incentro  $I$  de  $[ABC]$ , o ortocentro  $H$  de  $[DEF]$  e o ponto médio  $M$  do arco  $BAC$  da circunferência circunscrita a  $[ABC]$  são colineares.*

**Problema 28** (Rússia 2014). *Seja  $[ABC]$  um triângulo com  $\overline{AB} > \overline{BC}$ , e seja  $\Omega$  a sua circunferência circunscrita. Sejam  $M$  e  $N$  pontos nos lados  $[AB]$  e  $[BC]$ , respectivamente, tais que*

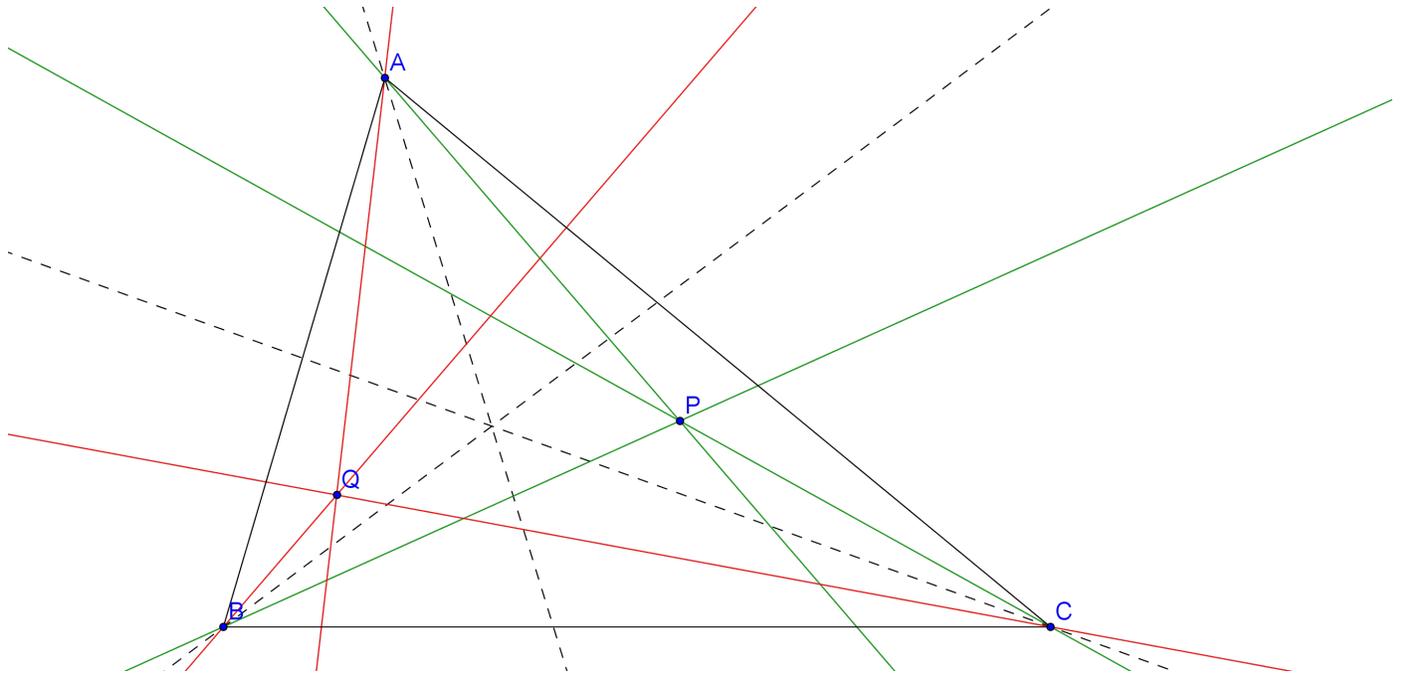
$\overline{AM} = \overline{CN}$ . Seja  $K$  o ponto de intersecção de  $MN$  e  $AC$ . Seja  $P$  o incentro do triângulo  $[AMK]$  e seja  $Q$  o  $K$ -excentro do triângulo  $[CNK]$ . Se  $R$  é o ponto médio do arco  $ABC$  de  $\Omega$ , prova que  $\overline{RP} = \overline{RQ}$ .

**Problema 29** (IMO 2013). Seja  $A_1$  o ponto de tangência da circunferência excrita ao triângulo  $[ABC]$  oposta ao vértice  $A$  com o lado  $[BC]$ . Definem-se os pontos  $B_1$  em  $[CA]$  e  $C_1$  em  $[AB]$  de forma análoga, utilizando as circunferências excritas opostas a  $B$  e a  $C$ , respectivamente. Supõe que o circuncentro do triângulo  $[A_1B_1C_1]$  pertence à circunferência circunscrita a  $[ABC]$ . Demonstra que o triângulo  $[ABC]$  é rectângulo.

## 8 Conjugados Isogonais

Nesta secção vamos estudar uma forma de, dado um triângulo e um ponto, construir um novo ponto. O Teorema fundamental desta secção é o que se segue.

**Teorema 8.1** (Teorema Fundamental dos Conjugados Isogonais). *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $P$  um ponto. Então as reflexões das rectas  $AP, BP$  e  $CP$  nas bissectrizes de  $\angle BAC, \angle CBA$  e  $\angle BCA$ , respectivamente, concorrem.*<sup>2</sup>

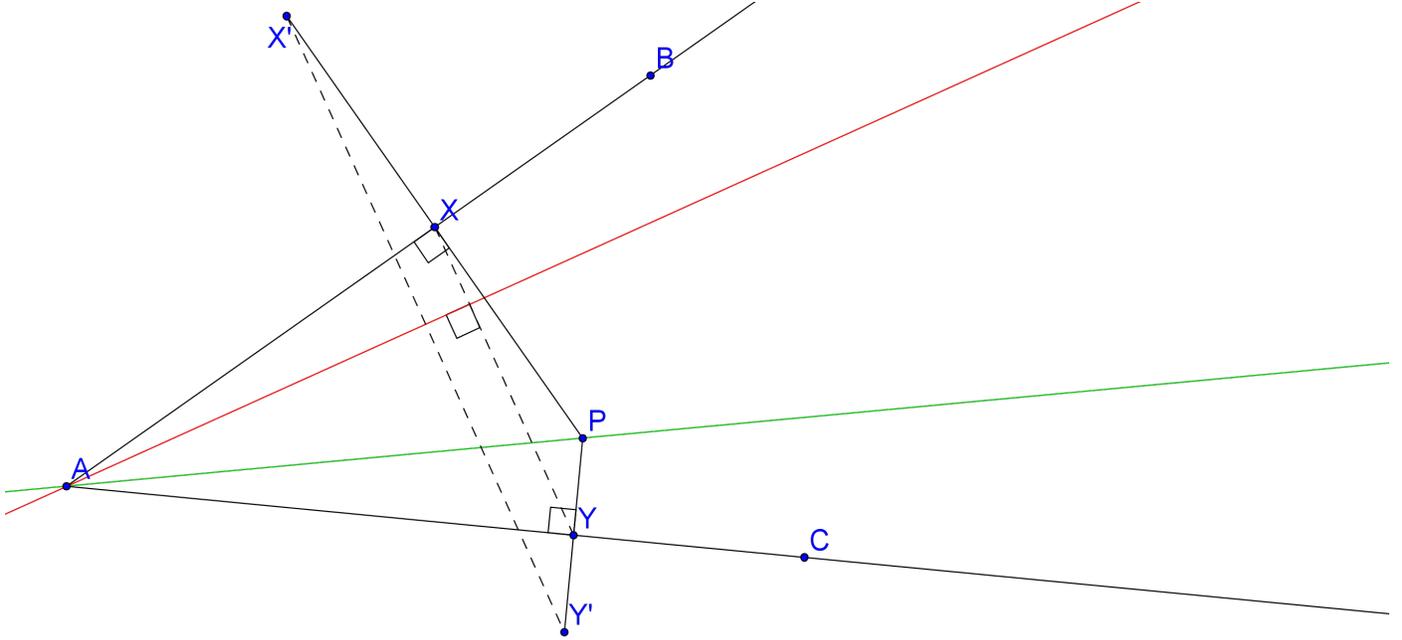


O ponto em que as três reflexões concorrem é chamado o *conjugado isogonal* de  $P$ . Uma prova bastante simples deste facto pode ser dada utilizando o Teorema de Ceva na forma trigonométrica, mas aqui vamos fazer uma demonstração sintética que se baseia num lema útil sobre conjugados isogonais. Dada uma ceviana  $\ell$  que passa por  $A$ , chamamos à sua reflexão pela bissectriz de  $\angle BAC$  a ceviana isogonal a  $\ell$ .

**Lema 8.2.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo,  $P$  um ponto e  $\ell'$  a ceviana isogonal a  $AP$ .*

- Sejam  $X$  e  $Y$  as projeções ortogonais de  $P$  em  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Então  $XY$  é perpendicular a  $\ell'$ .*
- Sejam  $X'$  e  $Y'$  as reflexões de  $P$  por  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Então  $\ell'$  é a mediatriz de  $[XY]$ .*

<sup>2</sup>Entendemos a concorrência como sendo no plano projectivo, ou seja, é possível que estas rectas sejam paralelas entre si. Isto ocorre se e só se  $P$  está no circuncírculo, como o leitor é convidado a provar.



*Demonstração.* Como  $\angle PXA = \angle PYA = \frac{\pi}{2}$ ,  $[AXPY]$  é cíclico. Observe-se ainda que  $\ell'$  ser a reflexão pela bissectriz de  $AP$  significa que  $\angle(AP, AB) = \angle(AC, \ell')$  (este é um facto a reter!). Assim, basta fazer angle-chasing com o quadrilátero cíclico e as perpendiculares:

$$\angle(XY, YA) = \angle(XP, PA) = \frac{\pi}{2} - \angle(PA, XA) = \frac{\pi}{2} - \angle(YA, \ell').$$

Daí resulta que  $\angle(XY, \ell') = \frac{\pi}{2}$ , provando (a).

Note-se agora que  $AB$  e  $AC$  são as mediatrizes de  $[PX']$  e  $[PY']$ , respectivamente, logo  $A$  é o circuncentro de  $[X'PY']$ . Além disso, como uma homotetia centrada em  $P$  de factor 2 envia  $[XY]$  em  $[X'Y']$ ,  $X'Y' \parallel XY \perp \ell'$ , e como  $\ell'$  passa por  $A$ , é claro que  $\ell'$  é a mediatriz de  $[X'Y']$ , como desejado.  $\square$

A partir daqui, a prova do teorema é muito simples.

*Demonstração.* Sejam  $\ell'_a, \ell'_b$  e  $\ell'_c$  as reflexões de  $AP, BP, CP$  nas bissectrizes de  $\angle A, \angle B, \angle C$ , respectivamente. Sejam  $X', Y', Z'$  reflexões de  $P$  em  $BC, CA, AB$ , respectivamente. Pelo lema,  $\ell'_a, \ell'_b$  e  $\ell'_c$  são respectivamente as mediatrizes de  $[Y'Z'], [Z'X']$  e  $[X'Y']$ , e portanto concorrem no circuncentro de  $[X'Y'Z']$ .  $\square$

A principal importância da existência dos conjugados isogonais é que podemos identifica-los apenas com duas cevianas, e a partir daí saber que ele está na terceira ceviana, o que nos dá logo uma relação de ângulos bastante não trivial. Uma interessante questão que se coloca é quais são os conjugados isogonais de pontos conhecidos. É trivial que o conjugado isogonal do incentro

(bem como dos excentros) é ele próprio. Um par de conjugados isogonais muito interessantes é o ortocentro e o circuncentro!

**Facto 8.3.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo com circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$ . Então  $O$  e  $H$  são conjugados isogonais relativamente a  $[ABC]$ .*

*Demonstração.* Vamos tratar o caso em que  $[ABC]$  é acutângulo e portanto  $O$  e  $H$  estão no seu interior, o caso em que não é é deixado ao leitor. Pelo teorema do arco-capaz,  $\angle AOB = 2\gamma$ , e como  $[AOB]$  é isósceles,  $\angle OAB = \frac{\pi - \angle AOB}{2} = \frac{\pi}{2} - \gamma$ . Por outro lado,  $\angle CAH = \frac{\pi}{2} - \gamma = \angle OAB$  (pois  $AH \perp BC$ ), logo  $AH$  é a reflexão de  $AO$  pela  $A$ -bissetriz, e analogamente para  $BH, BO$  e  $CH, CO$ , logo por definição  $O$  e  $H$  são conjugados isogonais.  $\square$

O conjugado isogonal do baricentro vai ser estudado na próxima subsecção, e nos problemas o leitor encontrará os conjugados isogonais dos pontos de Gergonne e de Nagel. Mas antes de avançar, vamos passar por dois lemas simples e úteis sobre conjugados isogonais; o primeiro dá-nos uma relação de ângulos, o segundo uma relação de comprimentos.

**Lema 8.4.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $P, Q$  dois conjugados isogonais relativamente a  $[ABC]$  e no seu interior. Então  $\angle BPC + \angle BQC = \pi + \angle BAC$ .*

*Demonstração.* É angle-chasing trivial:

$$\begin{aligned} \angle BPC + \angle BQC &= 2\pi - \angle PBC - \angle PCB - \angle QBC - \angle QCB \\ &= 2\pi - \angle PBC - \angle PCB - \angle PBA - \angle PCA \\ &= 2\pi - \angle ABC - \angle ACB = \pi + \angle BAC. \end{aligned} \quad \square$$

**Lema 8.5.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $D$  e  $E$  pontos em  $[BC]$  tais que  $AE$  é a reflexão de  $AD$  pela  $A$ -bissetriz. Então*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

*Demonstração.* Pela Lei dos Senos em  $[ABD]$  e  $[ACD]$ , notando que  $\angle ADB + \angle ADC = \pi$  e portanto os seus senos são iguais,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{\overline{AB} \sin(\angle BAD)}{\sin(\angle ADB)}}{\frac{\overline{AC} \sin(\angle CAD)}{\sin(\angle ADC)}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle CAD)}.$$

Analogamente obtemos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\sin(\angle BAE)}{\sin(\angle CAE)}.$$

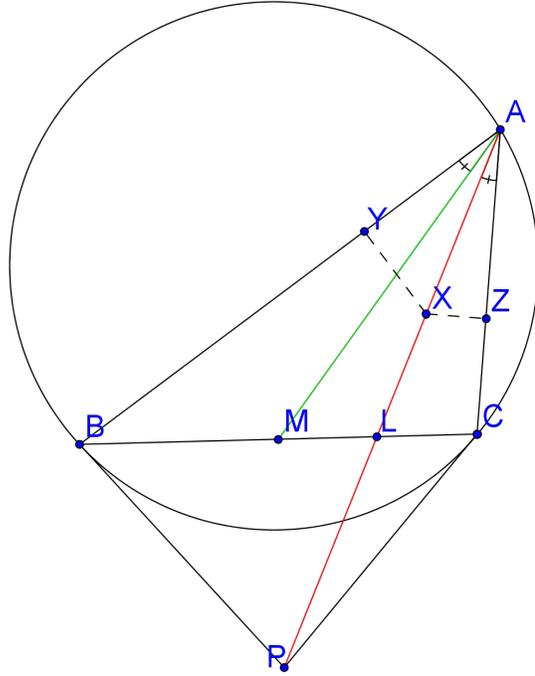
Como  $\angle BAD = \angle CAE$  e  $\angle CAD = \angle BAE$ , multiplicando as duas relações temos o pretendido.  $\square$

### 8.1 Simedianas

As *simedianas* são as cevianas isogonais às medianas, isto é, são as reflexões das medianas pelas bissectrizes. Assim, as simedianas intersectam-se no conjugado isogonal do baricentro (que é a intersecção das medianas) e que é chamado *ponto de Lemoine*. Nesta secção vamos estudar algumas propriedades da simediana. O próximo lema dá algumas caracterizações (de certa forma calculatórias) da simediana.

**Lema 8.6.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $L$  o pé da  $A$ -simediana em  $[BC]$ . Então temos o seguinte:*

- (a) *O pé da  $A$ -simediana  $L$  obedece a  $\frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{CA}^2}$ .*
- (b) *Um ponto  $X$  está na simediana se e só se  $\frac{\sin(\angle BAX)}{\sin(\angle CAX)} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$ .*
- (c) *Um ponto  $X$  está na simediana se e só se  $\frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$  onde  $Y$  e  $Z$  são as projeções de  $X$  em  $AB$  e  $AC$ , respectivamente.*



*Demonstração.* Por 8.5, com  $D = M$  sendo o ponto médio de  $[BC]$  e  $E = L$ , temos imediatamente (a) pois  $\overline{BM} = \overline{MC}$ . Pela lei dos Senos em  $[ABM]$  e  $[ACM]$ , temos

$$\frac{\sin(\angle CAM)}{\sin(\angle BAM)} = \frac{\frac{\overline{CM} \sin(\angle CMA)}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{BM} \sin(\angle BMA)}{\overline{AB}}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Uma vez que se  $X$  está na simediana temos  $\angle BAX = \angle CAM$  e  $\angle CAX = \angle BAM$ , obtemos  $\frac{\sin(\angle BAX)}{\sin(\angle CAX)} = \frac{\sin(\angle CAM)}{\sin(\angle BAM)} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$ . Por outro lado, se temos  $\frac{\sin(\angle BAX)}{\sin(\angle CAX)} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} = \frac{\sin(\angle CAM)}{\sin(\angle BAM)}$  pelo truque da cotangente<sup>3</sup> temos  $\angle BAX = \angle CAM$ , pelo que  $X$  está na A-simediana, provando (b).

Por fim, (c) é uma consequência directa de (b) já que  $\frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}} = \frac{\sin(\angle BAX)\overline{AX}}{\sin(\angle CAX)\overline{AX}} = \frac{\sin(\angle BAX)}{\sin(\angle CAX)}$ .  $\square$

Vamos agora apresentar uma construção geométrica para a simediana, e daremos duas provas. A primeira é sintética, a segunda é um exemplo de como usar o critério anterior para provar que um ponto está na simediana.

**Facto 8.7.** *Seja  $P$  a intersecção das tangentes por  $B$  e  $C$  ao circuncírculo de  $[ABC]$ . Então  $AP$  é a A-simediana.*

*Demonstração.* Seja  $N$  um ponto tal que  $[ABNC]$  é um paralelogramo. Afirmamos que  $N$  e  $P$  são conjugados isogonais. Por arco-capaz degenerado,  $\angle(AB, BP) = \angle(AC, CB)$ . Por outro lado, como  $BN \parallel AC$ ,  $\angle(NB, BC) = \angle(AC, BC) = \angle(AB, BP)$ , e assim conclui-se que as cevianas  $BN$  e  $BP$  são conjugadas isogonais; analogamente também  $CN$  e  $CP$  o são, provando que  $N$  e  $P$  são conjugados isogonais. Mas como  $[ABNC]$  é um paralelogramo,  $AN$  passa por  $M$ , logo  $AN$  é a A-mediana, pelo que  $AP$  é a simediana.  $\square$

Esta prova pode parecer pouco motivada, mas não o é. Provar directamente que  $AM$  e  $AP$  são isogonais parece difícil pois os ângulos que fazem com os lados do triângulo não são calculáveis; assim, provar que o conjugado isogonal de  $P$  está em  $AM$  parece uma opção sensata, pois assim podemos ignorar a ceviana  $AP$  e trabalhar apenas com as cevianas  $BP$  e  $CP$ , que já fazem ângulos agradáveis. Sendo  $N$  esse conjugado isogonal, temos  $\angle CBN = \angle BCA$  e  $\angle BCN = \angle CBA$ , e aí torna-se óbvio qual é o ponto  $N$ . Outra opção seria usar o lema 8.6, que é o que faremos de seguida.

*Demonstração 2.* Vamos tentar calcular os senos que aparecem no lema 8.6 (b). Por arco-capaz degenerado,  $\angle ABP = \pi - \gamma$ , logo pelo Teorema dos Senos em  $[ABP]$  vem que

$$\sin(\angle BAP) = \frac{\overline{BP} \sin(\angle ABP)}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BP} \sin \gamma}{\overline{AP}}.$$

Analogamente, temos  $\sin(\angle CAP) = \frac{\overline{CP} \sin \beta}{\overline{AP}}$ . Como  $\overline{CP} = \overline{BP}$ , dividindo um pelo outro temos

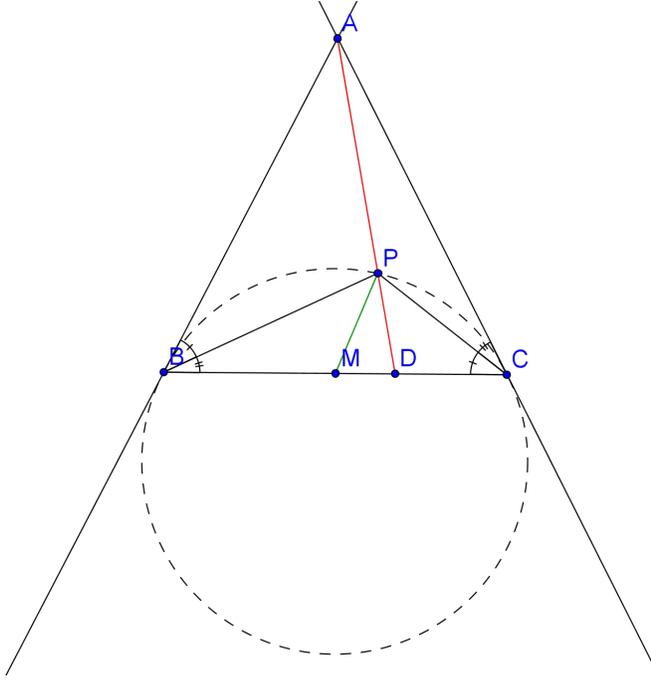
$$\frac{\sin(\angle BAP)}{\sin(\angle CAP)} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

A última igualdade vem da lei dos Senos em  $[ABC]$ , e isto conclui a prova pelo lema.  $\square$

Observemos o seguinte problema simples que ilustra uma boa ideia: dar interpretações geométricas a certas igualdades de ângulos/segmentos.

<sup>3</sup>O truque da cotangente essencialmente diz-nos que se  $x, y, z, w \in ]0, \pi[$  são tais que  $x + y = z + w$  e  $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin z}{\sin w}$ , então  $x = z$  e  $y = w$ . O seu nome deve-se à sua prova; definindo  $\theta = x + y = z + w$  e substituindo  $x = \theta - y$  e  $z = \theta - w$ , vamos obter após usar a fórmula do seno da subtração que  $\cotg(y) = \cotg(w)$ .

**Problema 30.** Seja  $[ABC]$  um triângulo tal que  $\overline{AB} = \overline{AC}$  e  $P$  um ponto no seu interior tal que  $\angle PBC = \angle PCA$ . Mostra que, sendo  $M$  o ponto médio de  $[BC]$ ,  $\angle BPM + \angle APC = \pi$ .



*Demonstração.* A primeira coisa que podemos notar é que, como  $\angle ABC = \angle ACB$ ,  $\angle ABP = \angle ABC - \angle PBC = \angle ACB - \angle PCA = \angle PCB$ . No entanto, continua a parecer impossível calcular os ângulos que queremos. Vejamos o que se está a passar; sendo  $D = AP \cap BC$ , queremos provar que  $\angle DPC = \pi - \angle APC = \angle BPM$ , ou seja, queremos provar que  $AP$  é a P-simediãana relativamente a  $[BPC]$ . Uma vez que  $\angle ABP = \angle PCB$ ,  $AC$  é tangente à circunferência circunscrita a  $[BPC]$ ; do mesmo modo, uma vez que  $\angle PBC = \angle PCA$ ,  $AB$  é tangente à circunferência circunscrita a  $[BPC]$ , logo por 8.7  $P$  está na A-simediãana, e temos o pretendido.  $\square$

Vamos apenas terminar esta secção com uma última propriedade das simedianas ligada às antiparalelas. Dado um triângulo  $[ABC]$ , a recta  $\ell$  diz-se antiparalela a  $BC$  se  $\angle(AB, \ell) = \angle(BC, AC)$ . Sendo  $D$  e  $E$  as intersecções de  $\ell$  com  $AB$  e  $AC$ ,  $\ell$  ser antiparalela a  $BC$  é equivalente a  $[BCED]$  ser cíclico, ou ainda a  $[ADE] \sim [ACB]$ . Facilmente verificamos que se  $\ell$  é antiparalela a  $BC$ ,  $\ell'$  é também antiparalela se e só se  $\ell \parallel \ell'$ ; além disso,  $\ell$  é antiparalela a  $BC$  se e só se  $\ell \perp AO$  onde  $O$  é o circuncentro de  $[ABC]$ , ou se  $\ell$  é paralela à tangente à circunferência circunscrita a  $[ABC]$  por  $A$ .

**Facto 8.8.** Sejam  $D$  e  $E$  pontos em  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, tais que  $DE$  é antiparalela a  $BC$ . Então a A-simediãana de  $[ABC]$  é a A-mediãana de  $[ADE]$ .

*Demonstração.* Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios de  $[BC]$  e  $[DE]$  respectivamente. Como  $[ABC] \sim [AED]$ , é evidente que  $[ABM] \sim [AEN]$ , logo  $\angle BAM = \angle EAN$ , pelo que  $AN$  é a A-simediãana de  $[ABC]$ , como pretendido.  $\square$

Mais geralmente, se temos uma A-ceviana relativa a  $[ABC]$ , a A-ceviana correspondente em  $[AED]$  é a isogonal à primeira. Os próximos problemas abordam os temas de conjugados isogonais e simedianas.

**Problema 31.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo,  $P$  e  $Q$  pontos no seu interior tais que  $\angle CBP = \angle PBQ = \angle QBA$  e  $\angle BCP = \angle PCQ = \angle QCA$ . Sejam  $D$  e  $E$  as projecções ortogonais de  $P$  sobre  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Prova que  $AQ$  é perpendicular a  $DE$ .*

**Problema 32** (Generalização da circunferência dos 9 pontos). *Sejam  $P$  e  $Q$  dois conjugados isogonais relativamente a  $[ABC]$ . Sejam  $P_1, P_2, P_3$  as projecções ortogonais de  $P$  em  $BC, CA, AB$ , respectivamente, e  $Q_1, Q_2, Q_3$  definidos analogamente. Mostra que há uma circunferência que passa pelos pontos  $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2$  e  $Q_3$ .*

**Problema 33.** *Prova que o conjugado isogonal do ponto de Gergonne (intersecção de  $AD, BE, CF$  onde  $D, E$  e  $F$  são os pontos de tangência do incírculo com  $BC, CA, AB$ , respectivamente) é o centro da homotetia inversa entre o circuncírculo no incírculo. Além disso, mostra que o ponto de Nagel e o centro da homotetia directa entre o incírculo e circuncírculo são também isogonais.*

**Problema 34** (IMO Shortlist 2000). *Sejam  $O$  e  $H$  os circuncentro e ortocentro de um triângulo acutângulo  $[ABC]$ . Mostra que existem pontos  $D, E, F$  nos lados  $BC, CA, AB$  tais que*

$$\overline{OD} + \overline{DH} = \overline{OE} + \overline{EH} = \overline{OF} + \overline{FH}$$

*e as rectas  $AD, BE, CF$  concorrem.*<sup>4</sup>

**Problema 35** (USAMO 2011). *Seja  $P$  um ponto no interior de um quadrilátero  $[ABCD]$ . Os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  estão no interior do quadrilátero e obedecem a*

$$\angle Q_1BC = \angle ABP, \quad \angle Q_1CB = \angle DCP, \quad \angle Q_2AD = \angle BAP, \quad \angle Q_2DA = \angle CDP.$$

*Prova que  $\overline{Q_1Q_2} \parallel \overline{AB}$  se e só se  $\overline{Q_1Q_2} \parallel \overline{CD}$ .*

**Problema 36** (IMO Shortlist 2003). *Três pontos distintos  $A, B, C$  são fixos e estão numa recta, nesta ordem. Seja  $\Gamma$  uma circunferência que passa por  $A$  e  $C$  cujo centro não está em  $AC$ . Seja  $P$  a intersecção das tangentes a  $\Gamma$  por  $A$  e por  $C$ , e seja  $Q$  a segunda intersecção de  $PB$  com  $\Gamma$ . Mostra que a intersecção da bissectriz de  $\angle AQC$  com a recta  $AC$  não depende de  $\Gamma$ .*

**Problema 37** (IMO Shortlist 2008). *Dado um quadrilátero  $[ABCD]$ , mostra que existe um ponto  $P$  no seu interior tal que*

$$\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = \frac{\pi}{2}$$

*se e só se  $AC \perp BD$ .*

<sup>4</sup>O leitor é convidado a generalizar o problema substituindo  $O$  e  $H$  por qualquer par de isogonais.

**Problema 38** (Balkan MO 2009). *Seja  $MN$  uma recta paralela ao lado  $BC$  do triângulo  $[ABC]$ , com  $M, N$  nos lados  $[AB], [AC]$ , respectivamente. As rectas  $BN$  e  $CM$  intersectam-se no ponto  $P$ . Os circuncírculos dos triângulos  $[BMP]$  e  $[CNP]$  intersectam-se em dois pontos distintos  $P$  e  $Q$ . Prova que  $\angle BAQ = \angle CAP$ .*

**Problema 39** (TST Vietnam 2001). *No plano, duas circunferências intersectam-se em  $A$  e  $B$ , e uma tangente comum às duas intersecta-as em  $P$  e  $Q$ . Seja  $S$  a intersecção das tangentes por  $P$  e  $Q$  ao circuncírculo de  $[APQ]$  e seja  $H$  a reflexão de  $B$  pela recta  $PQ$ . Mostra que  $A, S, H$  são colineares.*

**Problema 40** (USAMO 2008). *Seja  $[ABC]$  um triângulo acutângulo escaleno, e sejam  $M, N$  e  $P$  os pontos médios de  $[BC], [AC]$  e  $[AB]$ , respectivamente. Sejam  $D$  e  $E$  pontos na mediana  $[AM]$  tais que  $\overline{AD} = \overline{BD}$  e  $\overline{AE} = \overline{CE}$ . As rectas  $BD$  e  $CE$  intersectam-se em  $F$ . Prova que o quadrilátero  $[APFN]$  é cíclico.*

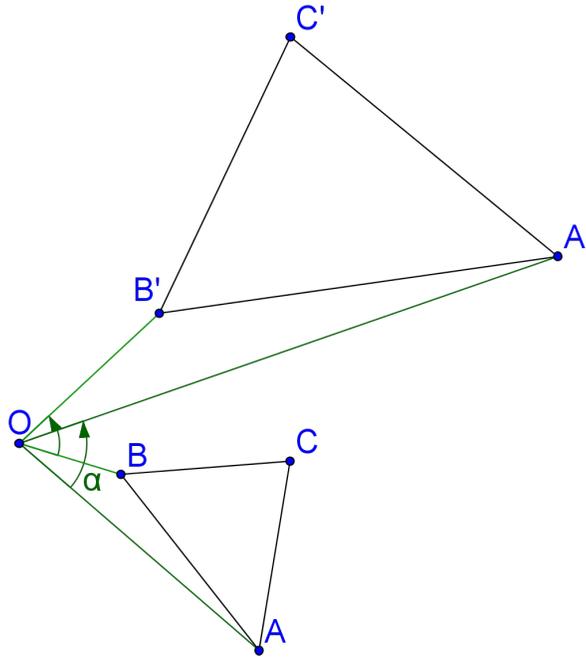
## 9 Roto-homotetias e o Teorema de Miquel

A roto-homotetia é uma transformação geométrica que resulta da composição de uma homotetia com uma rotação com o mesmo centro. As suas várias propriedades, nomeadamente o aparecimento de triângulos semelhantes e a construção geométrica do seu centro, fazem das roto-homotetias uma transformação natural e útil.

**Definição 9.1** (Roto-homotetia). *Uma roto-homotetia de centro em  $O$ , com razão  $k > 0$  e ângulo (no sentido direto)  $\alpha$  é uma transformação do plano que envia cada ponto  $P$  num ponto  $P'$  tal que  $\angle POP' = \alpha$  e  $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$ . Por outras palavras, é a composição de uma rotação com centro em  $O$  e ângulo  $\alpha$  e uma homotetia com centro em  $O$  e razão  $k$ .*

Essencialmente as roto-homotetias são transformações que preservam a forma das figuras. Vamos agora tentar abstrair-nos do seu ângulo e razão e concentrarmo-nos apenas no centro.

**Facto 9.2.** *Suponhamos que uma roto-homotetia com centro em  $O$  envia  $A$  para  $A'$ ,  $B$  para  $B'$  e  $C$  para  $C'$ . Então temos as seguintes semelhanças:  $[OAA'] \sim [OBB']$ ,  $[OAB] \sim [OA'B']$  e  $[ABC] \sim [A'B'C']$ .*



*Demonstração.* Observe-se que  $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$ , e pela definição  $\angle AOA' = \angle BOB'$ , de onde segue a primeira semelhança por lal. Usando ângulos orientados, pela definição de roto-homotetia, temos que  $\angle(OA, OB) = \angle(OA, OA') + \angle(OA', OB) = \angle(OB, OB') + \angle(OA', OB) = \angle(OA', OB')$ . Além disso, novamente como  $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$ , e portanto pelo critério lal temos que  $[OAB] \sim [OA'B']$ .

Mas usando isto, decorre que  $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$  e isso mostra que  $[ABC] \sim [A'B'C']$  pelo critério III.  $\square$

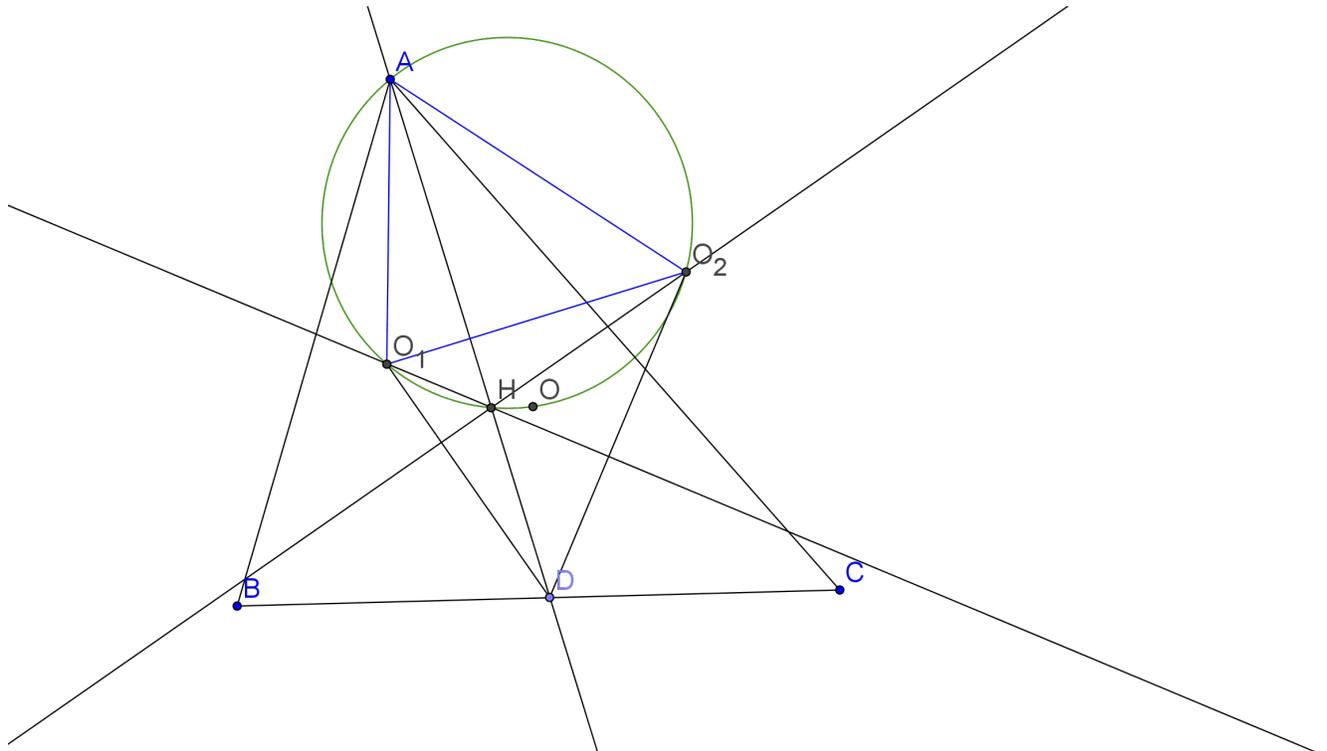
Não é difícil de ver que o lema implica que existe uma roto-homotetia com centro em  $O$  que envia  $[AB]$  em  $[A'B']$  se e só se  $[OAB] \sim [OA'B']$ ; de facto, o 'só se' vem imediatamente do lema, e para vermos que o 'se' é verdadeiro, basta considerar a única roto-homotetia que envia  $A$  em  $A'$ , e pela semelhança é evidente que também envia  $B$  em  $B'$ . Visto desta forma, o facto anterior tem um corolário imediato.

**Corolário 9.3.** *Suponhamos que uma roto-homotetia de centro  $O$  envia  $[AB]$  em  $[A'B']$ . Então existe uma roto-homotetia de centro em  $O$  que envia  $[AA']$  em  $[BB']$ .*

*Demonstração.* Como pelo facto 9.2  $[OAA'] \sim [OBB']$ , temos o pretendido.  $\square$

Antes de avançarmos para a propriedade mais interessante (e útil) das roto-homotetias, vamos primeiro resolver um problema com uma configuração algo familiar.

**Problema 41.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo,  $D \in [BC]$  e  $O_1$  e  $O_2$  os circuncentros de  $[ABD]$  e  $[ACD]$ , respectivamente. Seja  $O$  o circuncentro de  $[ABC]$  e  $H$  o ortocentro de  $[O_1O_2D]$ . Mostra que  $OH \parallel BC$ .*



Antes de pensarmos no problema, vamos ver um lema se aplica a vários problemas com uma construção semelhante.

**Lema 9.4.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo acutângulo,  $D \in [BC]$  e  $O_1$  e  $O_2$  os circuncentros de  $[ABD]$  e  $[ACD]$ , respectivamente. Então  $A$  é o centro da roto-homotetia que envia  $[BC]$  em  $[O_1O_2]$ .*

*Demonstração.* Com algum angle-chasing um pouco chato (e notando que  $O_1O_2$  é a mediatriz de  $[AD]$ ), podemos provar directamente que  $[ABC] \sim [AO_1O_2]$ . Mas apenas temos de mostrar, pelo corolário 9.3, que  $[BAO_1] \sim [CAO_2]$ , o que é mais simples! Sem perda de generalidade, suponhamos que  $\angle ADB$  não é obtuso e  $\angle ADC$  não é agudo. Então  $O_1$  e  $D$  estão do mesmo lado de  $AB$ , mas  $O_2$  e  $D$  estão em lados distintos de  $AC$  (ou então estão ambos nas rectas  $AB$  e  $AC$ , respectivamente). Então,  $[AO_1B]$  e  $[AO_2C]$  são ambos isósceles, e por arco-capaz  $\angle AO_1B = 2\angle ADB = 2\pi - 2\angle ADC = \angle AO_2C$ , e assim temos de facto que os dois triângulos são semelhantes.  $\square$

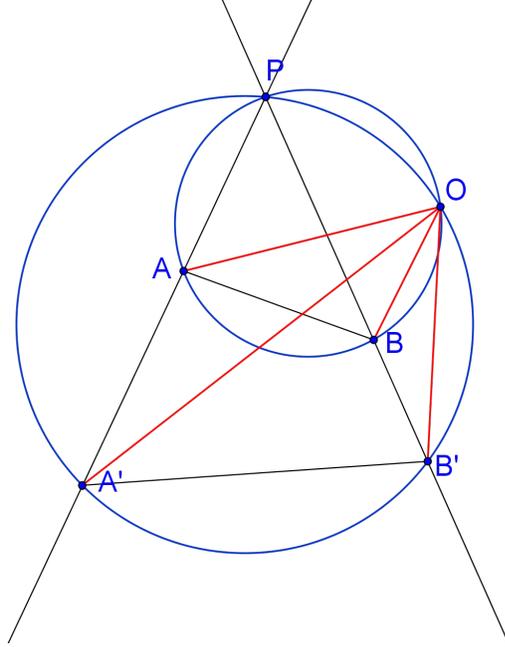
Note-se que este lema não depende do ponto  $D$ ! No entanto, ele não oferece uma caracterização completa dos pares de pontos  $O_1, O_2$  tais que existe um ponto  $D$  que lhes dá origem desta forma. Mas se impusermos as restrições  $\overline{AO_1} = \overline{O_1B}$  e  $\overline{AO_2} = \overline{O_2C}$  já temos uma condição suficiente, como o leitor pode notar facilmente. Vamos agora resolver o problema.

*Demonstração.* Que observações podemos fazer sobre o problema? Sabemos que  $O_1O_2$  é a mediatriz de  $[AD]$ , e portanto  $AD \perp O_1O_2$ . Mas, além disso, também  $DH \perp O_1O_2$ , o que implica que  $A, D, H$  são colineares. Como  $O_1O_2$  é a mediatriz de  $[AD]$ , os triângulos  $[AO_1O_2]$  e  $[DO_1O_2]$  são simétricos em relação a  $O_1O_2$ . Isso significa que  $H$  é a reflexão do ortocentro de  $[AO_1O_2]$  por  $O_1O_2$ , e portanto  $[AO_1HO_2]$  é cíclico (ou, sem pensar na reflexão assim,  $\angle O_1HO_2 = \pi - \angle O_1DO_2 = \pi - \angle O_1AO_2$ ).

Uma vez que  $A, H, D$  são colineares, precisamos de mostrar que  $\angle AHO = \angle ADC$ , ou equivalente; para o fazer, dava-nos bastante jeito um quadrilátero cíclico que envolvesse  $A, O$  e  $H$ ; após a observação acima,  $[AO_1HOO_2]$  é uma aposta bastante natural, e basta provar que  $[AO_1OO_2]$  é cíclico, o que, atendendo a que com o lema sabemos como caracterizar  $O_1, O_2$  sem envolver  $D$ , e que esse quadrilátero cíclico também não envolve  $D$ , não pode ser difícil de provar se for verdadeiro! De facto, como  $OO_1$  é a mediatriz de  $[AB]$  e usando o lema e arco-capaz, temos que  $\angle AOO_1 = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB = \angle AO_2O_1$ , o que prova a nossa conjectura! Agora para terminar basta um pouco mais de angle-chasing:  $\angle OHA = \angle OO_1A = \pi - \frac{1}{2}\angle AO_1B = \pi - \angle ADB = \angle ADC$ , e o problema terminou.  $\square$

Uma questão natural é se, dados pontos  $A, B, A', B'$ , haverá sempre uma roto-homotetia que envia  $[AB]$  em  $[A'B']$ ? E será esta única? E, além disso, como podemos identificar o centro dessa roto-homotetia? O lema que se segue responde a estas questões.

**Lema 9.5.** *Dados 4 pontos  $A, B, A', B'$  seja  $P = AA' \cap BB'$  e seja  $O$  a segunda intersecção dos circuncírculos de  $[APB]$  e  $[A'PB']$ . Então  $O$  é o centro da única roto-homotetia que envia  $[AB]$  em  $[A'B']$ .*

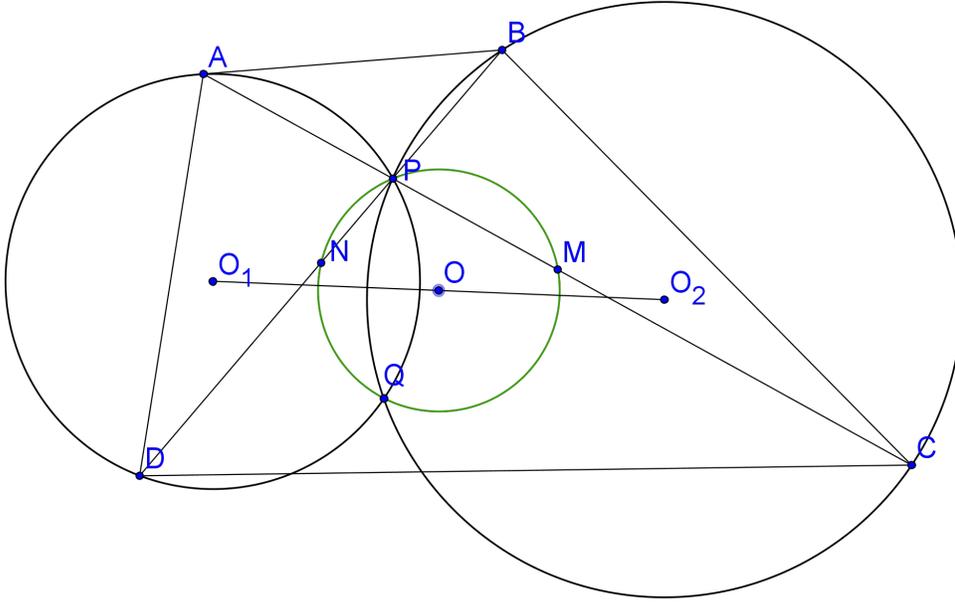


*Demonstração.* Vamos primeiro provar que, se  $O$  está definido como acima, existe uma roto-homotetia com centro em  $O$  que envia  $[AB]$  em  $[A'B']$ , ou seja, vamos provar que  $[OAB] \sim [OA'B']$ . Usando ângulos orientados para evitar problemas com configurações, por arco-capaz temos  $\angle(A'O, A'B') = \angle(PO, PB') = \angle(AO, AB)$ , e analogamente  $\angle(B'O, B'A') = \angle(BO, B'A')$ , de onde segue o pretendido por aa. Suponhamos agora que há outra roto-homotetia que cumpre o pedido com centro  $O'$ . Pelo facto 9.2,  $[O'AA'] \sim [O'BB']$ , de onde  $\angle(O'A', PA') = \angle(O'B', PB')$  e  $[O'B'A'P]$  é cíclico. Analogamente  $[O'BAP]$  é cíclico, pelo que  $O' \equiv O$ ; mas é trivial verificar que existe uma única roto-homotetia com centro em  $O$  que envia  $A$  em  $A'$ , e daqui temos a unicidade.  $\square$

Antes de passarmos para o Teorema de Miquel, vamos resolver mais um problema como exemplo.

**Problema 42.** *Seja  $[ABCD]$  um quadrilátero,  $P$  a interseção das suas diagonais e  $O_1, O_2$  os circuncentros de  $[APD]$  e  $[CPB]$ , respectivamente. Sejam  $M, N$  e  $O$  os pontos médios de  $[AC]$ ,  $[BD]$  e  $[O_1O_2]$ , respectivamente. Mostra que  $O$  é o circuncentro de  $[MPN]$ .*

*Demonstração.* É bastante sugestivo considerar a segunda interseção dos circuncírculos de  $[APD]$  e  $[CPB]$ ; seja  $Q$  este ponto. Então  $Q$  é o centro da roto-homotetia  $\mathbf{T}$  que envia  $[AD]$  em  $[CB]$ . Como  $O_1$  é o circuncentro de  $[AQD]$  e  $O_2$  de  $[BQC]$ , é claro que a mesma roto-homotetia envia  $O_1$  em  $O_2$ . Mas afinal como podemos ter em conta os pontos médios? Por 9.3,  $Q$  também é o centro de roto-homotetia que envia  $[AC]$  para  $[DB]$ ; mas as roto-homotetias preservam razões, e em particular pontos médios são enviados para pontos médios, logo essa roto-homotetia envia  $M$



para  $N$ . Assim, existe, usando novamente 9.3, uma roto-homotetia  $\mathbf{R}$  que envia  $[BC]$  para  $[NM]$ . De forma análoga,  $O_2$  é enviado para  $O$  por  $\mathbf{R}$ . Como  $\Gamma$  envia  $[BC]$  para  $[NM]$  e  $BN \cap CM = P$ , por 9.5 sabemos que  $[PMQN]$  é cíclico, e só temos de provar que  $O$  é o circuncírculo de  $[QMN]$ . Mas isso é evidente, uma vez que  $O_2$  é o circuncentro de  $[QCB]$  e  $\mathbf{R}$  envia  $O_2$  para  $O$  e  $[QCB]$  para  $[QMN]$ .  $\square$

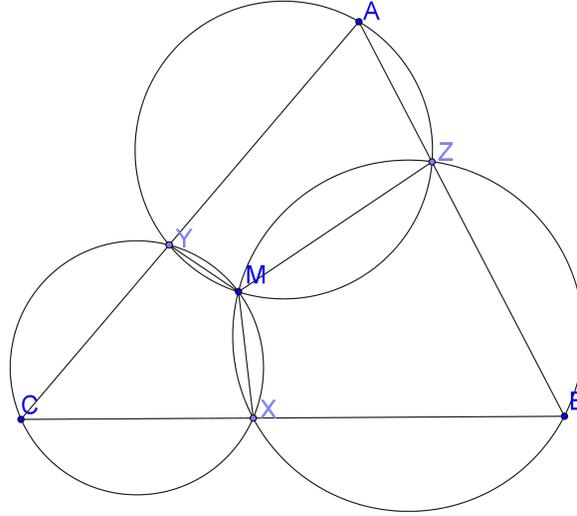
Esta solução passou essencialmente pela seguinte ideia: se uma roto-homotetia  $\mathbf{T}$  envia cada ponto  $P$  para outro ponto  $P'$ , existe uma roto-homotetia  $\mathbf{R}$  com o mesmo centro que envia cada ponto  $P$  para o ponto médio de  $[PP']$ . Por outras palavras,  $\mathbf{R}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{T}(x) + x)$  é uma roto-homotetia com o mesmo centro que  $\mathbf{T}$ .

### 9.1 Teoremas de Miquel

Existem dois Teoremas de Miquel, e ambos são relativos à concorrência de circunferências. Vamos enunciar os dois e prová-los.

**Teorema 9.6** (Teorema de Miquel para Triângulos). *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $X, Y, Z$  pontos nos lados  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. Então os circuncírculos de  $[AYZ], [BXZ]$  e  $[CXY]$  concorrem num ponto.*

*Demonstração.* Seja  $M$  a segunda interseção dos circuncírculos de  $[XBZ]$  e  $[XCY]$  (caso estas sejam tangentes,  $M \equiv X$  e interpretamos  $MX$  como a tangente comum às duas circunferências). Usamos novamente ângulos orientados para evitar discutir várias configurações:  $\angle(YM, MZ) = \angle(YM, MX) + \angle(MX, MZ) = \angle(YC, CX) + \angle(BX, BZ) = \angle(YA, AZ)$ , e portanto  $[AYMZ]$  é cíclico, o que prova que as três circunferências se intersectam em  $M$ .  $\square$



Dados vértices  $X, Y, Z$  nos lados do triângulo, chamamos ao ponto de intersecção das três circunferências o *ponto de Miquel* de  $[XYZ]$  relativamente a  $[ABC]$ . Uma propriedade muito interessante do ponto de Miquel em triângulos é a seguinte:

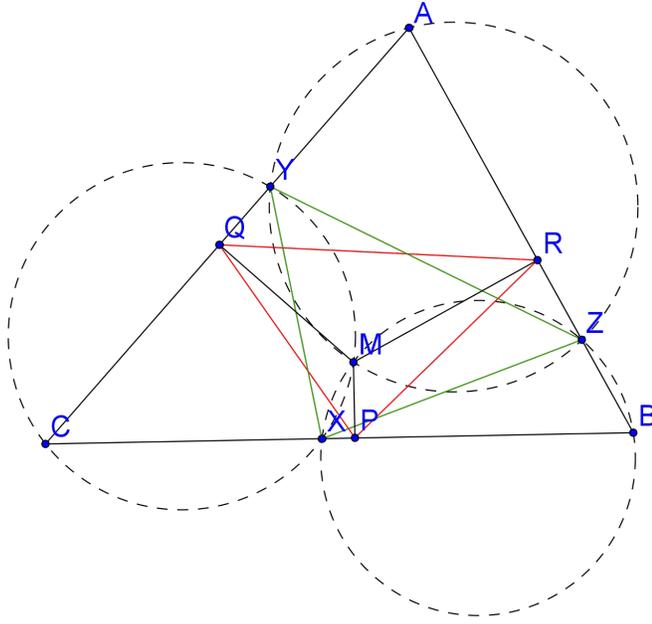
**Lema 9.7.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $X, X' \in [BC]$ ,  $Y, Y' \in [CA]$  e  $Z, Z' \in [AB]$ . Então os triângulos  $[XYZ]$  e  $[X'Y'Z']$  são semelhantes se e só se os pontos de Miquel dos dois triângulos relativamente a  $[ABC]$  coincidem.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $[XYZ] \sim [X'Y'Z']$ . Então existe uma roto-homotetia que envia  $[XYZ]$  em  $[X'Y'Z']$ ; seja  $M$  o centro dessa roto-homotetia. Em particular, a roto-homotetia envia  $[XY]$  em  $[X'Y']$ , e como  $XX' \cap YY' = C$ , por 9.5 sabemos que  $[CXYM]$  e  $[CX'MY']$  são cíclicos; analogamente obtemos que  $[BZMX]$ ,  $[BZ'MX']$ ,  $[AZMY]$  e  $[AZ'MY']$  também são cíclicos, logo  $M$  é o ponto de Miquel comum a  $[XYZ]$  e a  $[X'Y'Z']$ . Por outro lado, se os pontos de Miquel coincidem, provamos de forma análoga que uma roto-homotetia centrada no ponto comum envia um triângulo no outro, o que mostra que eles são semelhantes.  $\square$

Outra curiosidade que o leitor poderá provar é que, se intersectarmos  $AM, BM$  e  $CM$  com o circuncírculo de  $[ABC]$ , obtemos um triângulo semelhante a  $[XYZ]$ . O lema que acabámos de provar permite-nos provar algo muito interessante.

**Definição 9.8** (Triângulo Pedal). *Dado um triângulo  $[ABC]$  e um ponto  $M$  no plano, o triângulo pedal de  $M$  é o triângulo  $[PQR]$  onde  $P, Q, R$  são as projeções de  $M$  em  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente.*

A primeira coisa que notamos é que, pelos ângulos rectos,  $[AQM], [BPM]$  e  $[CPM]$  são cíclicos, logo  $M$  é o ponto de Miquel de  $[PQR]$ .

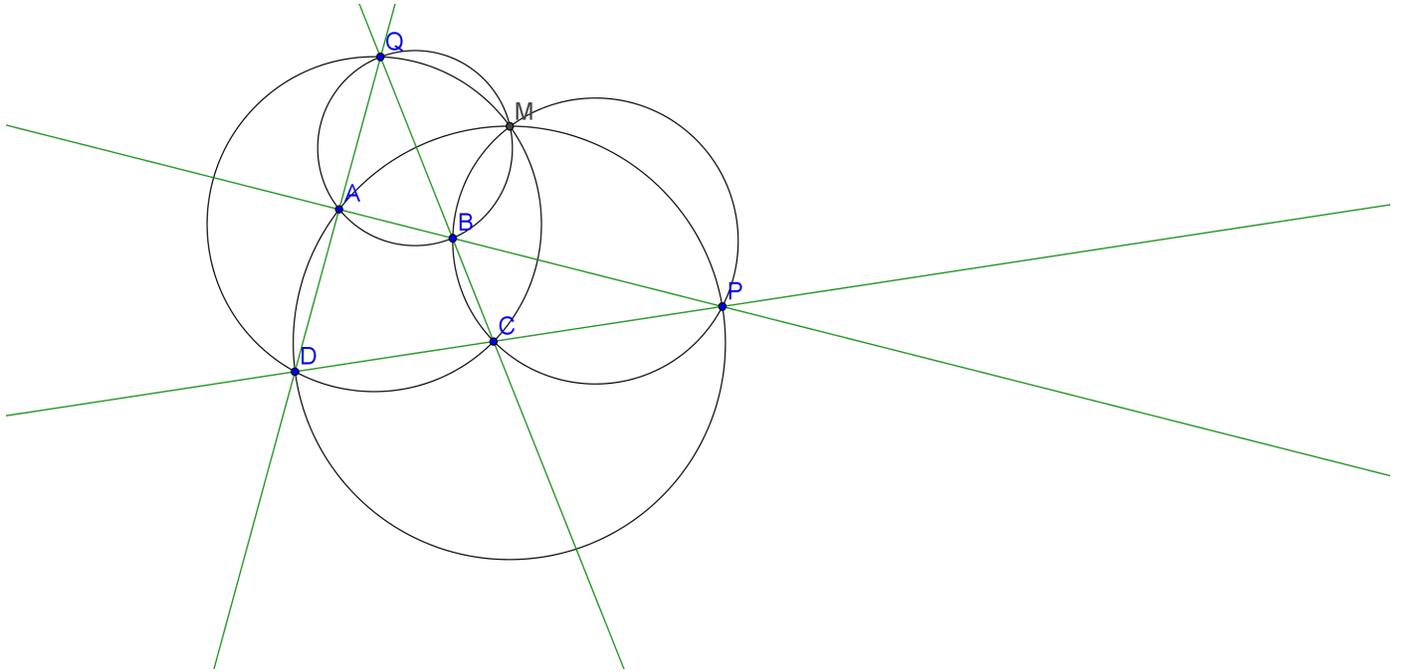


**Teorema 9.9** (Teorema do Mínimo). *Seja  $[ABC]$  um triângulo. Dado um triângulo  $\Delta$ , consideramos todos os triângulos  $[XYZ]$  com  $X, Y, Z$  em  $[BC], [CA], [AB]$ , respectivamente, tais que  $[XYZ]$  é semelhante a  $\Delta$ . De todos estes triângulos, aquele que tem a área mínima é o triângulo pedal de algum ponto  $M$ .*

*Demonstração.* A esta altura, é quase óbvio qual é o ponto  $M$ . Sabemos que todos os triângulos semelhantes a  $\Delta$  têm o seu ponto de Miquel em comum. Seja  $M$  esse ponto de Miquel, e seja  $[PQR]$  o seu triângulo pedal. Como o ponto de Miquel de  $[PQR]$  é também  $M$ , sabemos pelo lema anterior que  $[PQR]$  é semelhante a  $\Delta$ , logo resta-nos provar que qualquer triângulo  $[XYZ]$  semelhante a  $\Delta$  tem área maior ou igual à área de  $[PQR]$ . Uma roto-homotetia de centro em  $M$  envia  $[XYZ]$  em  $[PQR]$ , e essa roto-homotetia tem razão  $\frac{MP}{MX} \leq 1$ , o que mostra o pretendido.  $\square$

**Teorema 9.10** (Teorema de Miquel para Quadriláteros). *Sejam  $A, B, C, D$  quatro pontos no plano e  $P = AB \cap CD$  e  $Q = AD \cap BC$ . Então os circuncírculos de  $[APD], [AQB], [BPC]$  e  $[CQD]$  são concorrentes.*

*Demonstração.* Poderíamos provar este teorema com angle-chasing de forma análoga ao que fizemos acima, ou até usar o Teorema de Miquel para triângulos várias vezes (o leitor é convidado a tentá-lo). Mas, em vez disso, vamos a uma prova muito mais simples e natural. Seja  $M$  o centro da roto-homotetia que envia  $[AB]$  em  $[DC]$ ; pelo lema 9.5,  $[PMAD]$  e  $[PMBC]$  são cíclicos. Por outro lado, pelo facto 9.3 uma homotetia com centro em  $Q$  também envia  $[AD]$  em  $[BC]$ , logo também  $[QMBA]$  e  $[QMCD]$  são cíclicos, e isso mostra que as 4 circunferências se intersectam em  $M$ .  $\square$



É usual chamar aos pontos  $ABCDPQ$  um quadrilátero completo, e estes podem ser vistos como as 6 intersecções de 4 rectas em posição geral no plano. Além disso, o ponto de intersecção das circunferências  $M$  é chamado o *ponto de Miquel de  $[ABCD]$* .

## 9.2 Roto-Homotetias em números complexos

As roto-homotetias têm uma interpretação muito natural com números complexos. A multiplicação por um número complexo não nulo consiste numa roto-homotetia centrada na origem. Mais precisamente, se  $\rho = ke^{i\alpha}$  com  $k \in \mathbb{R}^+$ , a função que envia  $z \mapsto \rho z$  pode ser interpretada geometricamente como uma roto-homotetia com centro na origem, razão  $k$  e ângulo  $\alpha$ . E se tivermos uma roto-homotetia com centro diferente da origem? Essa roto-homotetia pode ser vista como a composição de uma translação que envia o centro  $o$  na origem, uma roto-homotetia na origem, e uma translação que envia a origem de volta para  $o$ . Dessa forma, roto-homotetias nos complexos são, em geral, funções da forma  $z \mapsto o + \rho(z - o)$ . Ou, ainda visto de outra forma, são funções  $z \mapsto Az + B$  para certos  $A \in \mathbb{C}^*$ ,  $B \in \mathbb{C}$  (no caso  $A = 1$ , o centro da roto-homotetia é um ponto no infinito e esta degenera para uma translação), ou seja, são as funções afins não constantes nos complexos, o que torna evidente a estrutura de grupo das roto-homotetias.

**Facto 9.11.** *A composição de duas roto-homotetias é uma roto-homotetia (ou uma translação). Além disso, toda a roto-homotetia tem inversa.*

Vamos recordar o lema 9.5, que prova que existe uma única roto-homotetia que envia  $[AB]$  em  $[CD]$  e que, de certa forma, mostra como a identificar. Nos complexos, como podemos identificá-la?

**Lema 9.12.** *Existe uma única roto-homotetia que envia  $[AB]$  em  $[CD]$ , e essa roto-homotetia pode ser definida nos complexos por  $z \mapsto o + \rho(z - o)$  onde  $\rho = \frac{c-d}{a-b}$  e  $o = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}$ .*

*Demonstração.* Pelo que vimos acima, sabemos que, se existir alguma, ela terá a forma  $z \mapsto o + \rho(z - o)$  para alguns  $z, o \in \mathbb{C}$ . Como  $a \mapsto c$  e  $b \mapsto d$ , obtemos as duas equações  $c = o + \rho(a - o)$  e  $d = o + \rho(b - o)$ , e resolvendo o sistema obtemos os valores acima. □

Dada a construção geométrica do centro da roto-homotetia, que envolve intersectar duas circunferências, é surpreendente que este tenha uma fórmula relativamente simples em complexos. A existência desta fórmula permite por vezes abordar problemas com complexos que, de outra forma, seria demasiado doloroso.

De seguida temos vários problemas que podem utilizar ideias desta secção (Roto-homotetias e o Teorema de Miquel, não especificamente complexos).

**Problema 43** (IMO Shortlist 2006). *Seja  $[ABCDE]$  um pentágono convexo tal que  $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$  e  $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$ . As diagonais  $BD$  e  $CE$  encontram-se em  $P$ . Prova que a recta  $AP$  passa pelo ponto médio de  $[CD]$ .*

**Problema 44** (USAMO 2008). *Seja  $[ABCD]$  um quadrilátero e sejam  $E$  e  $F$  pontos em  $[AD]$  e  $[BC]$ , respectivamente, tais que  $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ . A recta  $FE$  intersecta  $BA$  e  $CD$  em  $S$  e  $T$ , respectivamente. Mostra que o circuncírculo dos triângulos  $[SAE]$ ,  $[SBF]$ ,  $[TCF]$  e  $[TDE]$  têm um ponto em comum.*

**Problema 45** (IMO Shortlist 2006). *São escolhidos pontos  $A_1, B_1, C_1$  nos lados  $[BC]$ ,  $[CA]$  e  $[AB]$  de um triângulo  $[ABC]$ . Os circuncírculos dos triângulos  $[AB_1C_1]$ ,  $[BC_1A_1]$  e  $[CA_1B_1]$  intersectam o circuncírculo de  $[ABC]$  novamente em  $A_2, B_2, C_2$ , respectivamente. Os pontos  $A_3, B_3$  e  $C_3$  são as reflexões de  $A_1, B_1, C_1$  pelos pontos médios de  $[BC]$ ,  $[CA]$  e  $[AB]$ , respectivamente. Mostra que os triângulos  $[A_2B_2C_2]$  e  $[A_3B_3C_3]$  são semelhantes.*

**Problema 46** (IMO Shortlist 2005). *Seja  $[ABC]$  um triângulo acutângulo com  $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ . Seja  $H$  o ortocentro de  $[ABC]$ , e seja  $M$  o ponto médio do lado  $[BC]$ . Sejam  $D$  e  $E$  pontos nos lados  $[AB]$  e  $[AC]$ , respectivamente, tais que  $\overline{AD} = \overline{AE}$  e  $D, H$  e  $E$  são colineares. Prova que  $HM$  é perpendicular à corda comum das circunferências circunscritas a  $[ABC]$  e  $[ADE]$ .*

**Problema 47** (Brasil 1996). *Seja  $[ABC]$  um triângulo acutângulo e  $D$  um ponto variável no segmento  $[BC]$ . Seja  $O_1$  o circuncentro de  $[ABD]$ ,  $O_2$  o circuncentro de  $[ACD]$  e  $O$  o circuncentro de  $[AO_1O_2]$ . Encontra o lugar geométrico de  $O$  ao variar  $D$ .*

**Problema 48.** *Sejam  $A, B, C, D$  quatro pontos no plano e  $P = AB \cap CD$  e  $Q = AD \cap BC$ . Mostra que os circuncentros de  $[APD]$ ,  $[AQB]$ ,  $[BPC]$  e  $[CQD]$  e o ponto de Miquel de  $[ABCD]$  são cíclicos.*

**Problema 49** (USAMO 2013). Num triângulo  $[ABC]$ , temos pontos  $P, Q, R$  nos lados  $BC, CA, AB$ , respectivamente. Seja  $\omega_A$  o circuncírculo de  $[AQR]$  e  $\omega_B, \omega_C$  definidos analogamente. Sejam  $X, Y, Z$  as interseções de  $AP$  com  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ , respectivamente. Prova que  $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$ .

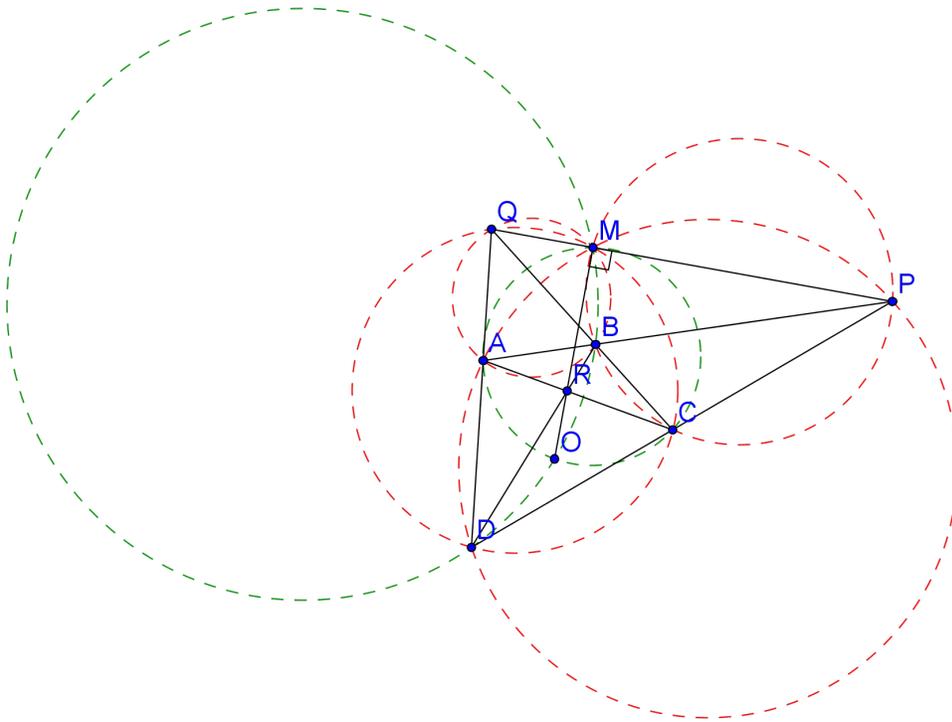
**Problema 50** (Zhautykov 2014). Pontos  $M, N$  e  $K$  estão nos lados  $[BC], [CA]$  e  $[AB]$  de um triângulo  $[ABC]$ , respectivamente. Dizemos que o triângulo  $[MNK]$  é apazível se  $\angle BAC = \angle KMN$  e  $\angle ABC = \angle KNM$ . Se no triângulo  $[ABC]$  existem dois triângulos apazíveis com um vértice em comum, mostra que  $[ABC]$  é rectângulo.

**Problema 51** (APMO 2014). Duas circunferências  $\omega$  e  $\Omega$  intersectam-se nos pontos  $A$  e  $B$ . Seja  $M$  o ponto médio do arco  $AB$  de  $\omega$  ( $M$  está dentro de  $\Omega$ ). Uma corda  $[MP]$  de  $\omega$  intersecta  $\Omega$  em  $Q$ . Seja  $l_P$  a recta tangente a  $\omega$  em  $P$ , e seja  $l_Q$  a recta tangente a  $\Omega$  em  $Q$ . Prova que a circunferência circunscrita ao triângulo determinado pelas rectas  $l_P, l_Q$  e  $AB$  é tangente a  $\Omega$ .

**Problema 52** (Zhautykov 2013). Dado um trapézio  $[ABCD]$  com  $AD \parallel BC$  e  $\angle ABC > 90^\circ$ , um ponto  $M$  é escolhido no lado  $[AB]$ . Sejam  $O_1$  e  $O_2$  os circuncentros dos triângulos  $[MAD]$  e  $[MBC]$ , respectivamente. Os circuncírculos de  $[MO_1D]$  e  $[MO_2C]$  intersectam-se novamente num ponto  $N$ . Mostra que  $O_1O_2$  passa pelo ponto  $N$ .

## 10 Ponto de Miquel em quadriláteros cíclicos

Nesta secção, vamos especializar a configuração do Teorema de Miquel para o caso em que  $[ABCD]$  é cíclico. Vamos ver que inúmeras propriedades interessantes associadas ao ponto de Miquel surgem. O desenho seguinte contém os vários diferentes elementos desta configuração, e pode ser um pouco confuso a uma primeira vista; esses elementos são explicados nas várias alíneas do teorema que se segue.



**Teorema 10.1.** *Seja  $[ABCD]$  um quadrilátero inscrito numa circunferência de centro  $O$ . Seja  $P = AB \cap CD$ ,  $Q = AD \cap BC$ ,  $R = AC \cap BD$  e  $M$  o ponto de Miquel de  $[ABCD]$ . Então temos as seguintes propriedades:*

- (a)  $M$  está na recta  $PQ$ ;
- (b)  $OM$  é perpendicular a  $PQ$ ;
- (c) Os pontos  $O, R$  e  $M$  são colineares — além disso,  $M$  é o inverso de  $R$  relativamente à circunferência circunscrita a  $[ABCD]$ ;
- (d) Os quadriláteros  $[AMCO]$  e  $[BMDO]$  são cíclicos;
- (e)  $MR$  é a bissetriz dos ângulos  $\angle AMC$  e  $\angle BMD$ .

Existem várias formas de provar estes resultados, e mesmo a ordem com que os provamos pode diferir. Vamos apresentar duas provas totalmente distintas; a primeira é, dentro do possível, elementar e apenas requer os conhecimentos da secção anterior e potência de ponto. A segunda assenta principalmente na teoria das polares (nomeadamente o teorema de Brokard), é mais curta e poderá oferecer mais *insight* sobre esta configuração, além de servir como exemplo do uso de inversão e polares.

*Demonstração 1.* Sejam  $K$  e  $L$  os pontos médios de  $[AD]$  e  $[BC]$ , respectivamente. Como  $M$  é o ponto de Miquel de  $[ABCD]$ , uma roto-homotetia de centro em  $M$  envia  $[AD]$  em  $[BC]$ , e portanto evidentemente a mesma roto-homotetia envia  $[AK]$  em  $[BL]$ . Assim, existe uma roto-homotetia de centro em  $M$  que envia  $[KL]$  em  $[AB]$ , por 9.3 (isto foi precisamente o mesmo que fizemos já num problema anterior). Deste modo, por 9.5,  $[QMLK]$  é cíclico. Mas nós temos que  $\angle QLO = \angle QKO = \frac{\pi}{2}$ , logo  $O$  é o ponto diametralmente oposto a  $Q$  com respeito à circunferência circunscrita a  $[QMLOK]$ , e portanto  $\angle QMO = \frac{\pi}{2}$ ; analogamente  $\angle PMO = \frac{\pi}{2}$ , e portanto  $\angle QMP = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ , de onde segue (a) e (b).

Vamos agora provar (d), que é um simples angle-chasing. Como  $[AQMB]$  e  $[BMPC]$  são cíclicos, e usando arco-capaz em  $[ABCD]$ , temos

$$\begin{aligned} \angle(AM, MC) &= \angle(AM, MB) + \angle(MB, MC) = \angle(AQ, QB) + \angle(PB, PC) \\ &= \angle(AQ, PC) + \angle(PB, QB) = 2\angle(AD, DC) = \angle(AO, OC). \end{aligned}$$

Isto mostra que  $[AMCO]$  é cíclico, e analogamente  $[BMDO]$  também o é.

Notemos agora que, usando o que acabámos de provar,  $AC$  é o eixo radical de  $(AMCO)^5$  e  $(ABCD)$ ,  $BD$  é o eixo radical de  $(BMDO)$  e  $(ABCD)$  e  $OM$  é o eixo radical de  $(AMCO)$  e  $(BMDO)$ , logo pelo teorema do Centro Radical sabemos que  $AC$ ,  $BD$  e  $OM$  concorrem, ou seja,  $O$ ,  $R$  e  $M$  são colineares. Como  $\overline{OA} = \overline{OC}$ ,  $O$  é o ponto médio do arco  $AC$  de  $(AMCO)$ , e como tal  $MO$  é a bissetriz de  $\angle AMC$ , e dado que  $R \in MO$ , temos (e) provado.

Apenas nos falta provar que  $R$  e  $M$  são inversos relativamente a  $(ABCD)$ . Como já sabemos que  $O$ ,  $R$  e  $M$  são colineares, é suficiente mostrar que  $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OM} = r^2$  onde  $r$  é o raio de  $(ABCD)$ . Pelo teorema das cordas, temos que

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{RM} - \overline{OR}^2 = -\text{Pot}(R, (ABCD)) - \overline{OR}^2 = -\text{Pot}(R, (AMCO)) - \overline{OR}^2 = r^2.$$

Na penúltima igualdade utilizámos que  $R$  está no eixo radical de  $(ABCD)$  e  $(AMCO)$ , e na última a definição de potência de ponto. Provámos assim a alínea (c), e terminámos a prova do teorema. □

---

<sup>5</sup>Denotamos por  $(\mathcal{P})$  a circunferência circunscrita a  $\mathcal{P}$ , quando esta existe.

*Demonstração 2.* Denotamos por  $X^*$  a imagem de  $X$  pela inversão em  $(ABCD)$ . Observe-se que os vértices de  $[ABCD]$  são enviados para si próprios. Além disso, como  $RP$  é a polar de  $Q$  pelo teorema de Brokard, logo  $Q^* \in RP$  pela própria definição de polar, e do mesmo modo  $P^* \in QR$ . Como  $[AQMB]$  e  $[DQMC]$  são cíclicos,  $[AQ^*M^*B]$  e  $[DQ^*M^*C]$ ; pelo teorema do Centro Radical nas circunferências  $(ABCD)$ ,  $(AQ^*M^*B)$  e  $(DQ^*M^*C)$ , obtemos que  $M^*, Q^*$  e  $P$  são colineares, logo  $M^* \in RP$ ; analogamente  $M^* \in RQ$ , e assim  $M^* = R$ , o que demonstra (c).

Pelo Teorema de Brokard  $PQ$  é a polar de  $R$ , logo  $R^* = M$  é a projeção ortogonal de  $O$  em  $PQ$ , o que demonstra de imediato (a) e (b). Como  $A, R$  e  $C$  são colineares, a inversão envia essa recta para uma circunferência que passa por  $O, A, R^* = M$  e  $C$ , pelo que  $[OAMC]$  é cíclico, provando (d) (pois do mesmo modo  $[OBMD]$  também é cíclico). Poderíamos provar (e) de forma simples como fizemos acima, mas não o vamos fazer: seja  $T = BD \cap PQ$ ; como  $T$  está na polar de  $R$ ,  $\mathcal{H}(D, B; R, T)$  e, uma vez que  $\angle RMT = \frac{\pi}{2}$ , é um facto conhecido que isto implica que  $MR$  é a bissectriz de  $\angle DMB$ , terminando a demonstração.  $\square$

Observe-se que em momento algum exigimos que os pontos  $A, B, C, D$  estivessem em ordem na circunferência. O leitor poderá tentar fazer ele próprio um desenho análogo ao que temos no início da secção quando os pontos não estão na ordem habitual.

Em alguns problemas, podemos identificar esta configuração (mais ou menos escondida) e os factos acima dão um importante avanço no problema, se não o resolvem imediatamente. De seguida temos alguns problemas que podem usar estas ideias.

**Problema 53** (IMO 1985). *Uma circunferência com centro  $O$  passa pelos vértices  $A$  e  $C$  de um triângulo  $[ABC]$  e intersecta  $[AB]$  e  $[BC]$  novamente nos pontos  $K$  e  $L$ . Seja  $M$  a intersecção diferente de  $B$  dos circuncírculos dos triângulos  $[ABC]$  e  $[KBN]$ . Mostra que  $\angle OMB = 90^\circ$ .*

**Problema 54.** *Sejam  $\omega_1$  e  $\omega_2$  duas circunferências que se intersectam em  $P$  e  $Q$ . Uma circunferência  $\omega$  centrada em  $Q$  intersecta as circunferências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  nos quatro pontos  $X, Y, Z$  e  $W$  tais que  $[XYZW]$  é convexo. Seja  $N_1 = XY \cap ZW$  e  $N_2 = YZ \cap XW$ . Mostra que  $N_1N_2 \perp MO$ .*

**Problema 55** (TST USA 2007). *Um triângulo  $[ABC]$  está inscrito numa circunferência  $\omega$ . As retas tangentes a  $\omega$  por  $B$  e  $C$  encontram-se em  $T$ . O ponto  $S$  está na semi-recta  $\dot{BC}$  e é tal que  $AS \perp AT$ . Os pontos  $B_1$  e  $C_1$  encontram-se na semi-recta  $\dot{ST}$  (com  $C_1$  entre  $B_1$  e  $S$ ) e são tais que  $\overline{TB} = \overline{TB_1} = \overline{TC_1}$ . Prova que  $[AB_1C_1]$  e  $[ABC]$  são semelhantes.*

**Problema 56** (TST USA 2009). *Seja  $[ABC]$  um triângulo acutângulo. O ponto  $D$  está no segmento  $[BC]$ ; sejam  $O_B$  e  $O_C$  os circumcentros de  $[ABD]$  e  $[ACD]$ , respectivamente. Supõe que os pontos  $B, C, O_B$  e  $O_C$  se encontram numa circunferência centrada em  $X$ . Seja  $H$  o ortocentro de  $[ABC]$ . Prova que  $\angle DAX = \angle DAH$ .*

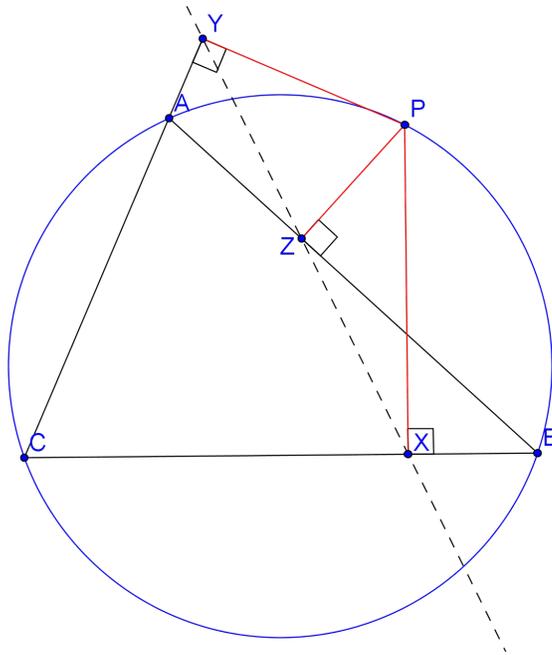
**Problema 57.** *Seja  $[ABCD]$  um quadrilátero inscrito numa circunferência de centro  $O$ ,  $P = AD \cap BC$ ,  $Q = AB \cap CD$ ; a perpendicular a  $AC$  por  $Q$  intersecta  $OP$  em  $X$ . Prova que  $\angle ABX$  é recto.*

## 11 Rectas de Simson, Steiner e Gauss

Nesta secção vamos observar três colinearidades interessantes, todas elas com alguma relação entre si.

### 11.1 Recta de Simson

**Teorema 11.1** (Recta de Simson). *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $P$  um ponto no seu circuncírculo. Sejam  $X, Y, Z$  as projeções ortogonais de  $P$  em  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. Então  $X, Y, Z$  são colineares.*



É também fácil mostrar que o converso é verdade, isto é, se  $X, Y, Z$  são colineares,  $P$  está no circuncírculo. Por outras palavras, o triângulo pedal de  $P$  é degenerado se e só se este está no circuncírculo. Que relação tem este facto com conjugados isogonais?

*Demonstração.* Observe-se que como  $\angle PXB = \angle PZB = \angle PZA = \angle PYA = \frac{\pi}{2}$ , os quadriláteros  $[PZXB]$ ,  $[PZAY]$  e  $[YPXC]$  são cíclicos. Então, usando as perpendicularidades e arco-capaz nesses quadriláteros temos que

$$\angle(BZ, ZX) = \angle(BP, PX) = \frac{\pi}{2} - \angle(BC, PB) = \frac{\pi}{2} - \angle(AC, PA) = \angle(PA, YP) = \angle(ZA, YZ).$$

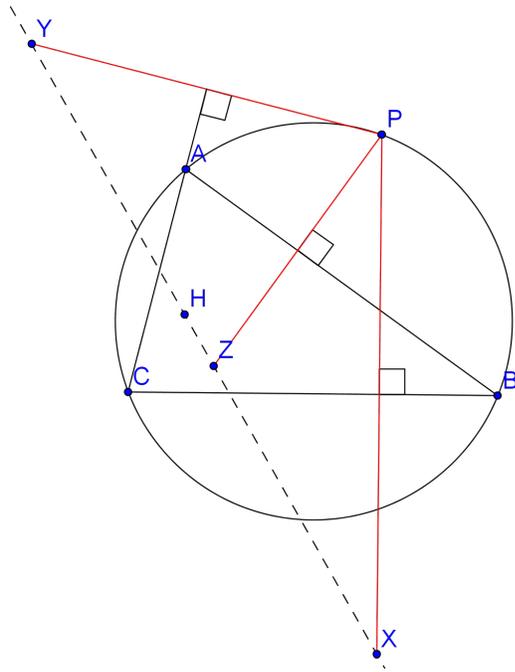
E daqui segue o pretendido. □

Chamamos à recta que passa por  $X, Y, Z$  a recta de Simson de  $P$  relativamente a  $[ABC]$ .

## 11.2 Recta de Steiner

E se, no teorema de recta de Simson, em vez de considerarmos as projeções ortogonais de um ponto nos lados do triângulo, considerarmos as reflexões desse ponto nos lados? Estes pontos também vão ser colineares, pois são a imagem das projeções ortogonais por uma homotetia de factor 2 centrada em  $P$ . A recta formada é chamada recta de Steiner, e tem uma propriedade adicional muito interessante: passa pelo ortocentro!

**Lema 11.2.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo com ortocentro  $H$  e  $P$  um ponto no seu circuncírculo. Sejam  $X, Y, Z$  as reflexões de  $P$  em  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. Então  $X, Y, Z, H$  são colineares.*



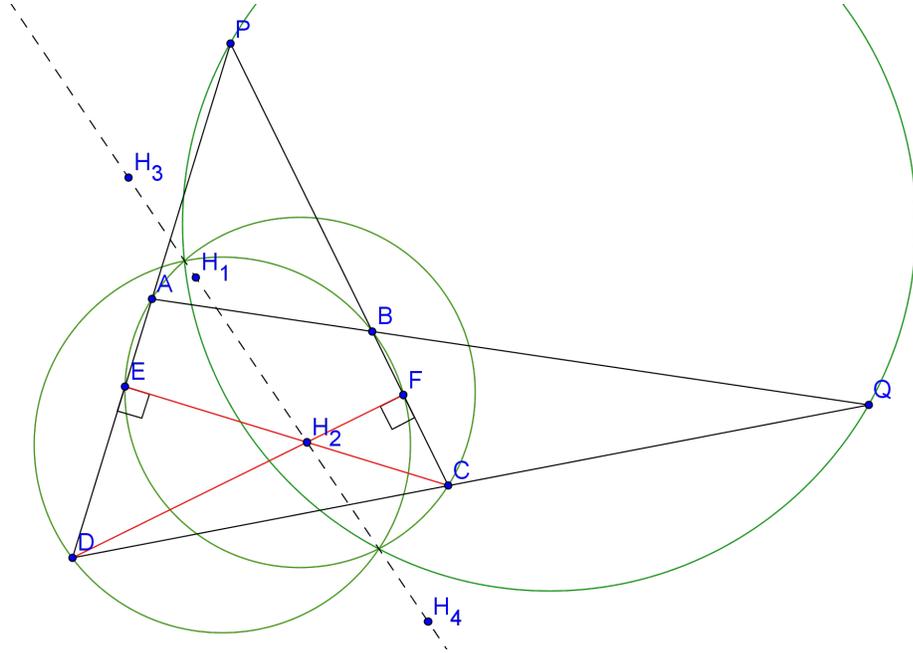
*Demonstração.* Já vimos anteriormente que a reflexão de  $H$  em  $BC$  está no circuncírculo; mas isso é o mesmo que dizer que a reflexão do circuncírculo por  $BC$  é uma circunferência que passa por  $H$ . Dessa forma,  $X$  também está nessa circunferência, logo  $[BXCH]$  é cíclico. Analogamente  $[AHCY]$  e  $[BHZA]$  também o são. Vamos usar isto, a ciclicidade de  $[APBC]$  e as reflexões para fazer angle-chasing:

$$\angle(CH, HX) = \angle(CB, BX) = \angle(PB, BC) = \angle(PA, AC) = \angle(AC, AY) = \angle(CH, HY)$$

E assim obtemos que  $H, X, Y$  são colineares. Analogamente  $H, X, Z$  são colineares, e por transitividade  $H, X, Y, Z$  são os 4 colineares.  $\square$

Do mesmo modo que fizemos com a recta de Simson, chamamos à recta que passa por  $X, Y, Z$  a recta de Steiner de  $P$  relativamente a  $[ABC]$ . Na verdade, aquela que é conhecida por recta de Steiner não é exactamente esta, mas sim a que aparece no próximo teorema.

**Teorema 11.3** (Teorema de Gauss-Bodenmiller). *Seja  $[ABCD]$  um quadrilátero,  $P = AD \cap BC$  e  $Q = AB \cap CD$ . Sejam  $H_1, H_2, H_3$  e  $H_4$  os ortocentros dos triângulos  $[APB], [DPC], [AQD]$  e  $[BQC]$ , respectivamente. Então  $H_1, H_2, H_3$  e  $H_4$  são colineares.*



*Demonstração.* Seja  $M$  o ponto de Miquel de  $[ABCD]$  e  $X, Y, Z, W$  as reflexões de  $M$  por  $AB, BC, CD$  e  $DA$ , respectivamente. Como  $M$  está no circuncírculo de  $[APB]$ ,  $H_1, X, Y$  e  $Z$  são colineares, pois são a recta de Steiner de  $M$  relativamente a  $[APB]$ . Analogamente  $H_2, Y, Z, W$  são colineares,  $H_3, X, Z, W$  são colineares e  $H_4, X, Y, Z$ . Por transitividade, todas estas rectas de Steiner de  $M$  coincidem, logo os quatro ortocentros e as quatro reflexões são colineares.  $\square$

Esta recta é conhecida como a *recta de Steiner do quadrilátero  $[ABCD]$* . Na verdade, existe ainda uma caracterização diferente para esta recta, caracterização essa que nos permite provar (e até fortalecer) o teorema.

*Demonstração 2.* Vamos mostrar que os ortocentros estão todos no eixo radical das circunferências com diâmetro  $[AC]$  e  $[BD]$  (chamemos-lhes  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ). Vamos fazê-lo apenas para  $H_2$ , os restantes são análogos (o único motivo da escolha deste ponto é ser melhor visível do diagrama acima). Sejam  $E = PD \cap CH_2$  e  $F = PC \cap DH_2$ . Como  $\angle CED = \frac{\pi}{2} = \angle DFC$ ,  $[CDEF]$  é cíclico,  $E$  está em  $\omega_1$  e  $F$  está em  $\omega_2$ . Assim,  $H_2$  está no eixo radical de  $(CDEF)$  e de  $\omega_1$ , bem como no de  $(CDEF)$  e  $\omega_2$ , logo  $H_2$  é o centro radical das três circunferências, logo está no eixo radical de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .  $\square$

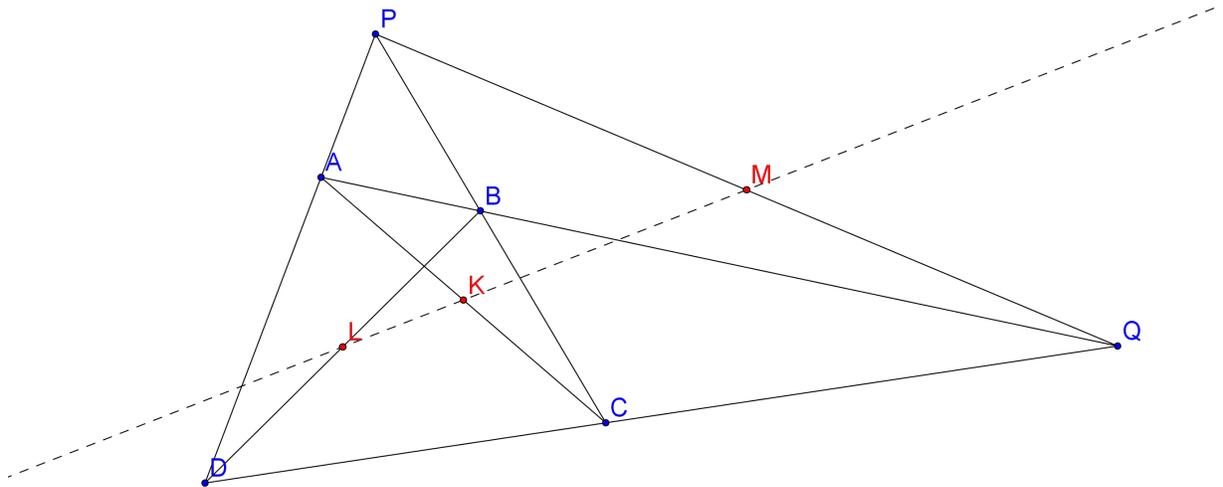
Note-se que da mesma maneira que provámos que a recta de Steiner é o eixo radical das circunferências com diâmetros  $[AC]$  e  $[BD]$ , poderíamos provar exactamente da mesma maneira que é o eixo radical de  $[AC]$  e  $[PQ]$ ; de facto, se aplicarmos o que provámos no quadrilátero  $[APCQ]$  temos exactamente isso. Dessa forma, podemos enunciar o que provámos do seguinte modo:

**Teorema 11.4** (Teorema de Gauss-Bodenmiller). *Seja  $[ABCD]$  um quadrilátero,  $P = AD \cap BC$  e  $Q = AB \cap CD$ . Então as circunferências com diâmetros  $[AC]$ ,  $[BD]$  e  $[PQ]$  são coaxiais (têm o mesmo eixo radical) e o seu eixo radical comum é a recta de Steiner de  $[ABCD]$ .*

### 11.3 Recta de Gauss

Vamos a mais uma colinearidade no quadrilátero completo, que na verdade pode ser vista como uma consequência directa do teorema de Gauss-Bodenmiller.

**Teorema 11.5** (Recta de Gauss). *Seja  $[ABCD]$  um quadrilátero,  $P = AD \cap BC$  e  $Q = AB \cap CD$ . Sejam  $K, L, M$  os pontos médios de  $[AC]$ ,  $[BD]$  e  $[PQ]$ , respectivamente. Então os pontos  $K, L, M$  são colineares. Além disso, a recta que contém estes pontos é perpendicular à recta de Steiner.*



*Demonstração.* Estes pontos são os centros das circunferências com diâmetros  $[AC]$ ,  $[BD]$  e  $[PQ]$  e, como estas são coaxiais pelo teorema de Gauss-Bodenmiller, os seus centros são colineares pois estão todos na recta por  $K$  perpendicular ao eixo radical comum a estas, que é a recta de Steiner.  $\square$

Vamos ainda apresentar uma prova que não utiliza o conhecimento da recta de Steiner.

*Demonstração 2.* Sejam  $E, F, G$  os pontos médios de  $[PD]$ ,  $[DC]$  e  $[CP]$ , respectivamente. Uma homotetia de factor 2 com centro em  $P$  envia  $E, G, M$  em  $D, C, Q$ , respectivamente, pelo que

$E, G, M$  são colineares e  $\frac{\overrightarrow{EM}}{\overrightarrow{GM}} = \frac{\overrightarrow{DQ}}{\overrightarrow{CQ}}$ ; temos também relações análogas para os outros lados do triângulo  $[PCD]$ , e multiplicando todas, pelo Teorema de Menelaus o lado direito é igual a  $-1$ , pois  $A, B, Q$  são colineares. Logo, pelo Teorema de Menelaus em  $[EGF]$ ,  $L, K, M$  são colineares.  $\square$

De seguida estão alguns problemas olímpicos em que estes resultados podem ser aplicados.

**Problema 58.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $D$  a projeção ortogonal de  $A$  em  $BC$ . Sejam  $M, N, X, Y$  as projeções ortogonais de  $H$  sobre as alturas relativas a  $B, C$  e sobre os lados  $AB, AC$ . Mostra que  $M, N, X, Y$  são colineares.*

**Problema 59** (EGMO 2014). *Seja  $[ABC]$  um triângulo tal que  $[BC]$  é o menor lado, e sejam  $D$  e  $E$  pontos nos segmentos  $[AB]$  e  $[AC]$ , respectivamente, tais que  $\overline{BD} = \overline{BC} = \overline{CE}$ . As retas  $CD$  e  $BE$  concorrem em  $F$ . Prova que o incentro  $I$  de  $[ABC]$ , o ortocentro  $H$  de  $[DEF]$  e o ponto médio  $M$  do arco  $BAC$  do circuncírculo de  $[ABC]$  são colineares.*

**Problema 60** (USAMO 2010). *Seja  $[AXYZB]$  um pentágono convexo inscrito numa semicircunferência de diâmetro  $[AB]$ . Sejam  $P, Q, R, S$  as projeções de  $Y$  sobre  $AX, BX, AZ, BZ$ , respectivamente. Prova que o ângulo (agudo) entre as rectas  $PQ, RS$  mede metade do ângulo  $\angle XOZ$ , onde  $O$  é o ponto médio de  $[AB]$ .*

**Problema 61** (TST USA 2014). *Seja  $[ABC]$  um triângulo acutângulo e  $X$  um ponto variável no interior do arco  $BC$  que não contém  $A$  do seu circuncírculo. Sejam  $P$  e  $Q$  as projeções ortogonais de  $X$  nas rectas  $CA$  e  $CB$ , respectivamente. Seja  $R$  a intersecção de  $PQ$  com a perpendicular a  $AC$  por  $B$ . Seja  $\ell$  a recta que passa por  $P$  paralela a  $XR$ . Prova que ao variar  $X$ , a recta  $\ell$  passa por um ponto fixo.*

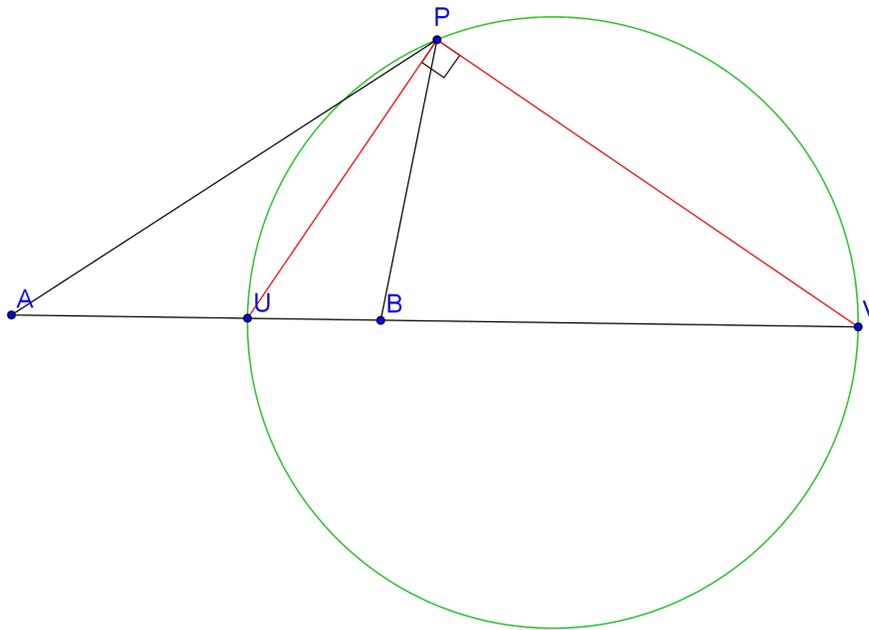
**Problema 62** (IMO Shortlist 2009). *Dado um quadrilátero cíclico  $[ABCD]$ , seja  $E = AC \cap BD$  e  $F = AD \cap BC$ . Os pontos médios de  $[AB]$  e  $[CD]$  são  $G$  e  $H$ , respectivamente. Mostra que  $EF$  é tangente ao circuncírculo de  $[EGH]$ .*

**Problema 63** (IMO Shortlist 2009). *Dado um quadrilátero não trapézio  $[ABCD]$ , os seus lados  $AD$  e  $BC$  intersectam-se num ponto  $P$ . Os pontos  $O_1$  e  $O_2$  são os circuncentros e os pontos  $H_1$  e  $H_2$  os ortocentros dos triângulos  $[ABP]$  e  $[CDP]$ , respectivamente. Denotamos os pontos médios de  $[O_1H_1]$  e  $[O_2H_2]$  por  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente. Mostra que as perpendiculares a  $CD$  por  $E_1$  e a  $AB$  por  $E_2$  concorrem na recta  $H_1H_2$ .*

## 12 Circunferência de Apolónio

A circunferência de Apolónio é o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$  é fixo (onde  $A$  e  $B$  são pontos fixos). Este lugar geométrico é, talvez surpreendentemente, uma circunferência, e nesta secção vamos prová-lo, ver algumas propriedades destas circunferências e como aplica-las em problemas olímpicos.

**Teorema 12.1** (Circunferência de Apolónio). *São dados dois pontos  $A, B$  fixos e  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  fixo. Então o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \lambda$  é uma circunferência com centro na recta  $AB$ .*

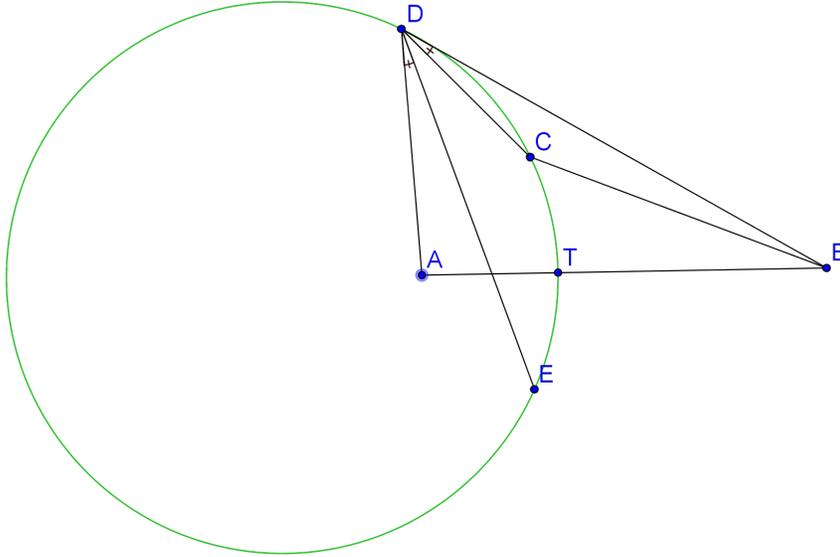


Para sermos precisos, quando  $\lambda = 1$  o lugar geométrico é a mediatriz de  $[AB]$ , e não uma circunferência; mas podemos ver a mediatriz como uma circunferência degenerada quando o centro da mesma tende para infinito.

*Demonstração.* Não é difícil constatar que existe um único ponto  $U$  no segmento  $[AB]$  que cumpre o pretendido, e um único ponto  $V$  fora do segmento (se  $\lambda > 1$ ,  $B$  está entre  $A$  e  $V$ ; se  $\lambda < 1$ ,  $A$  está entre  $B$  e  $V$ ). Afirmamos que o lugar geométrico é a circunferência com diâmetro  $[UV]$ , que tem como centro o ponto médio de  $[UV]$ , que está em  $AB$ . Suponhamos que  $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \lambda = \frac{\overline{AU}}{\overline{BU}} = \frac{\overline{AV}}{\overline{BV}}$ ; então, pelo Teorema de Bissetriz,  $U$  e  $V$  são os pés das bissetrizes interna e externa de  $\angle APB$ , respectivamente, pelo que  $\angle UPV = \frac{\pi}{2}$  (pois as duas bissetrizes são perpendiculares) de onde segue que  $P$  está na circunferência de diâmetro  $[UV]$ , como pretendido. Fica a cargo do leitor a direção contrária, isto é, provar que se  $P$  está na circunferência,  $P$  cumpre o enunciado.  $\square$

Uma coisa que esta prova nos mostra também (e que é, na verdade, evidente a partir do Teorema da Bissetriz) é que a circunferência de Apolónio é o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $PU$  é a bissetriz de  $\angle APB$  (em que  $U \in [AB]$  é fixo). Vejamos um exemplo interessante num problema.

**Problema 64** (Polónia). *Seja  $[ABCD]$  um quadrilátero côncavo com  $\angle BCD$  maior que  $\pi$  e  $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ . Seja  $E$  o ponto simétrico a  $C$  em relação a  $AB$ . Prova que  $\angle EDA = \angle CDB$ .*

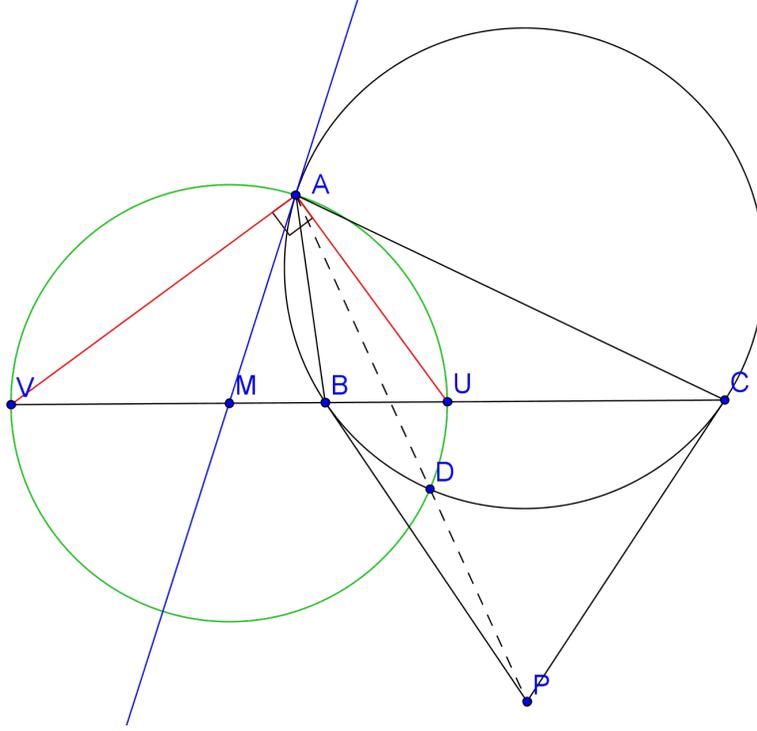


*Demonstração.* A condição sobre os lados do triângulo é equivalente a  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$ , e é aqui que surge a circunferência de Apolónio — esta condição é equivalente a  $D$  e  $C$  pertencerem à mesma circunferência de Apolónio relativa a  $[AB]$ ; seja  $\Gamma$  essa circunferência. Mas como  $E$  é a reflexão de  $C$  por  $AB$ ,  $C$  pertence a  $\Gamma$  e o centro de  $\Gamma$  está em  $AB$ , também  $E$  pertence a  $\Gamma$  (alternativamente podemos notar que  $\overline{AE} = \overline{AC}$  e  $\overline{BE} = \overline{BC}$ ). Precisamos de uma igualdade de ângulos, e a circunferência de Apolónio tem uma relação com a bissetriz, como já vimos. Seja então  $T$  a interseção da circunferência de Apolónio com  $[AB]$ ; sabemos que  $DT$  é a bissetriz de  $\angle ADB$ , logo  $\angle ADT = \angle BDT$ . Isto não é bem o que nós queremos; mas uma vez que  $\angle ADE = \angle ADT - \angle EDT$  e  $\angle CDB = \angle TDB - \angle TDC$ , o enunciado torna-se equivalente a  $\angle EDT = \angle TDC$ . E isto é simples de provar, pois uma vez que o centro de  $\Gamma$  está em  $AB$ ,  $T$  é o ponto médio do arco  $CE$  de  $\Gamma$ , logo  $DT$  é a bissetriz de  $\angle CDE$ , e isso termina o problema.  $\square$

Vamos agora definir as circunferências de Apolónio de um triângulo. Dado um triângulo  $[ABC]$ , a A-circunferência de Apolónio é a circunferência de Apolónio relativa a  $[BC]$  que passa por  $A$ ; pelo que já vimos, se  $U$  e  $V$  forem os pés das A-bissetrizes interna e externa, essa circunferência é a circunferência com diâmetro  $[UV]$ . Sabemos então que o ponto médio  $M$  de  $[UV]$  é o centro da

A-circunferência da Apolónio, mas o próximo lema dá uma construção alternativa (e muito útil) para  $M$ .

**Lema 12.2.** *Seja  $M$  a intersecção da reta  $BC$  com a tangente ao circuncírculo de  $[ABC]$  por  $A$ . Então  $M$  é o centro da A-circunferência de Apolónio.*



*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponhamos que  $\overline{AB} < \overline{AC}$ . Então  $B$  está entre  $M$  e  $C$ . Vamos mostrar que  $[AMU]$  é isósceles. Sabemos que  $\angle AUM = \pi - \angle UBA - \angle UAB = \pi - \beta - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \gamma$ . Por outro lado, por arco-capaz degenerado,  $\angle UAM = \angle UAB + \angle BAM = \frac{1}{2}\alpha + \gamma = \angle AUM$ . Mas assim  $M$  é a intersecção da mediatriz de  $[AU]$  com  $BC$ , e portanto é o centro da A-circunferência de Apolónio.  $\square$

Observe-se que aquilo que acabámos de provar é equivalente à A-circunferência de Apolónio e ao circuncírculo de  $[ABC]$  serem ortogonais. Podemos usar isso para dar uma segunda prova usando “maquinaria” mais pesada.

*Demonstração.* Como  $\mathcal{H}(B, C; U, V)$ ,  $B$  está na polar de  $C$  relativamente à A-circunferência de Apolónio, e como o centro desta é colinear com  $B$  e  $C$ , estes dois são inversos. Logo uma inversão na A-circunferência de Apolónio troca  $B$  e  $C$  e fixa  $A$ , pelo que o circuncírculo de  $[ABC]$  é enviado para si próprio, mostrando que este é ortogonal à A-circunferência de Apolónio.  $\square$

Vejam mais duas interessantes propriedades das circunferências de Apolónio de um triângulo. Para a primeira, vamos dar três demonstrações diferentes, cada uma com o seu interesse.

**Facto 12.3.** *O eixo radical da A-circunferência de Apolónio e do circuncírculo de  $[ABC]$  é a A-simediãna.*

*Demonstração 1.* Seja  $D$  a segunda intersecção da A-simediãna com o circuncírculo de  $[ABC]$ . Pela lei dos senos e por 8.6, temos  $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$ , logo  $D$  pertence à A-circunferência de Apolónio, provando o pretendido.  $\square$

*Demonstração 2.* Seja  $P$  a intersecção das tangentes por  $B$  e  $C$  ao circuncírculo (que está na simediãna, por 8.7),  $D$  definido como atrás e  $X = AP \cap BC$ .  $X$  está em  $BC$  que é a polar de  $P$ , logo  $\mathcal{H}(A, D; X, P)$ . Projectando por  $C$ , vem que  $\mathcal{H}(A, D; B, C)$ , logo  $D$  está na A-circunferência de Apolónio.  $\square$

*Demonstração 3.* Seja  $O$  o circuncentro de  $[ABC]$ . Note-se que  $M$  está na polar de  $A$  e na polar de  $P$ , logo por La Hire's  $AP$  é a polar de  $M$ , logo  $OM \perp AP$ . Assim, a simediãna passa por  $A$  e é perpendicular a  $OM$ , logo é o eixo radical das duas circunferências.  $\square$

**Facto 12.4.** *As três circunferências de Apolónio de um triângulo concorrem em dois pontos.*

*Demonstração.* Sejam  $J$  e  $J'$  as intersecções da B-circunferência de Apolónio e da C-circunferência de Apolónio. Então temos que  $\frac{\overline{AJ}}{\overline{CJ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$  e  $\frac{\overline{BJ}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}$ . Multiplicando as duas equações,  $\frac{\overline{BJ}}{\overline{CJ}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$ , logo  $J$  está também na A-circunferência de Apolónio, bem como  $J'$  por um argumento análogo.  $\square$

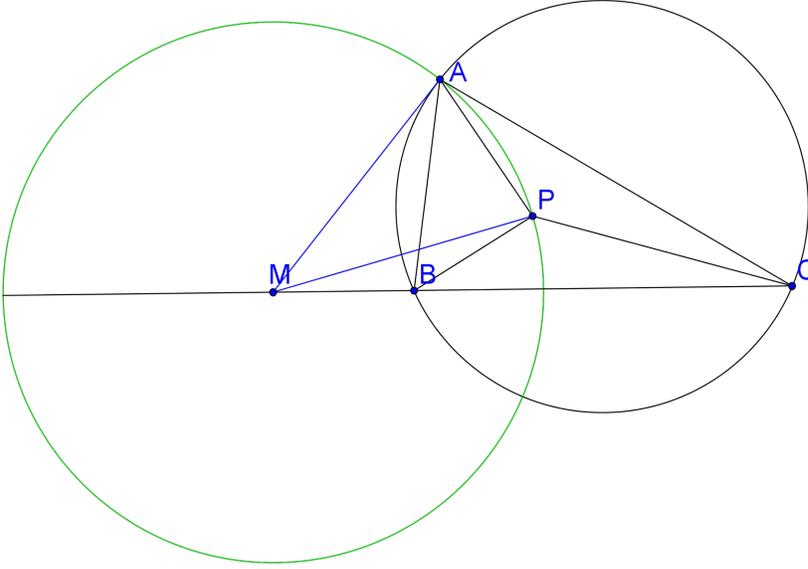
Os pontos  $J$  e  $J'$  são conhecidos como os primeiro e segundo pontos isodinâmicos, sendo que o primeiro se encontra no interior do triângulo e o segundo no exterior. Um corolário imediato do facto anterior é que os centros das três circunferências de Apolónio são colineares, pois estão todos na mediatriz de  $[JJ']$ . Mais algumas propriedades dos pontos isodinâmicos podem ser encontradas nos problemas. Vamos agora mostrar como podemos aplicar circunferências de Apolónio no problema 2 das IMO de 1996.

**Problema 65** (IMO 1996). *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $P$  um ponto no seu interior tal que*

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC. \quad (*)$$

*Sejam  $D$  e  $E$  os incentros de  $[ABC]$  e  $[PBC]$ , respectivamente. Prova que as rectas  $AD, PE$  e  $BC$  concorrem.*

*Demonstração.* Sabemos que  $AD$  e  $PE$  são as bissetrizes de  $\angle BAC$  e  $\angle BPC$ , respectivamente. Logo, o enunciado pede-nos simplesmente para provar que se  $P$  satisfaz  $(*)$ , então está na A-circunferência de Apolónio! Talvez não seja óbvio como provar esta implicação, mas provar que



se  $P$  está na A-circunferência de Apolónio então temos (\*) parece mais simples. Seja  $M$  o centro da A-circunferência de Apolónio. Novamente, vamos supor que  $\overline{AC} > \overline{AB}$ ; vamos apenas mostrar isto quando  $P$  está no interior de  $[ABC]$ , caso contrário teríamos de discutir outros casos análogos, ou utilizar ângulos orientados, o que neste caso poderia tornar a ideia essencial desta solução mais difícil de entender.

Sabemos que  $AM$  é tangente a  $(BAC)$ , mas além disso, se  $P$  também está nessa circunferência de Apolónio,  $PM$  é tangente a  $(BPC)$ . Com isto e arco-capaz degenerado podemos calcular  $\angle AMB$  e  $\angle PMB$ ; mais precisamente,  $\angle AMB = \pi - \angle MAB - \angle ABM = \pi - \gamma - (\pi - \beta) = \beta - \gamma$ , e analogamente  $\angle PMB = \angle PBC - \angle PCB$ , e portanto conseguimos com isto calcular  $\angle AMP$ . Mas, por outro lado, como  $[AMP]$  é isósceles,  $\angle AMP = \pi - 2\angle APM = \pi - 2\angle APB + 2\angle MPB = \pi - 2\angle APB + 2\angle PCB$ . Deste modo, comparando expressões e notando que  $\angle AMB = \angle PMB + \angle AMP$ , temos

$$\beta - \gamma = 2\pi - (\pi - \angle PCB - \angle PBC) - 2\angle APB = 2\pi - \angle BPC - 2\angle APB = \angle APC - \angle APB.$$

E isso prova que se  $P$  está na A-circunferência de Apolónio,  $P$  verifica (\*). Suponhamos, por outro lado, que um ponto  $P$  verifica (\*) e não está na A-circunferência de Apolónio; vamos aproveitarmo-nos do que já provámos. Seja  $P' \neq P$  um ponto tal que  $\angle APB = \angle AP'B$  e  $P'$  está na A-circunferência de Apolónio — tal ponto existe pois é simplesmente a segunda intersecção de  $(APB)$  com a A-circunferência de Apolónio. Como  $P$  e  $P'$  verificam (\*), segue que  $\angle APC = \angle AP'C$ ; mas assim  $[APP'B]$  e  $[APP'C]$  são ambos cíclicos, logo  $P$  está no circuncírculo de  $[ABC]$ , contradição com estar no interior de  $[ABC]$  (de facto, podemos daqui deduzir que o lugar geométrico de  $P$  é a união do circuncírculo com a A-circunferência de Apolónio)! Concluimos assim que  $P \equiv P'$ , e portanto  $P$  está na A-circunferência de Apolónio terminando o problema.  $\square$

Outros problemas relacionados e que provam mais alguns factos interessantes (e úteis, nomeadamente o primeiro) podem ser encontrados de seguida.

**Problema 66.** *Seja  $[ABC]$  um triângulo e  $P$  um ponto variável. Sejam  $K, L$  e  $M$  as projeções de  $P$  em  $AB, BC, CA$ . Mostra que o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $\overline{KL} = \overline{LM}$  é a  $A$ -circunferência de Apolónio. Conclui que os dois pontos isodinâmicos são os únicos cujo triângulo pedal é equilátero.*

**Problema 67.** *Dado um triângulo  $[ABC]$ , construímos pontos  $X, Y, Z$  fora do triângulo tais que  $[BCX], [ACY]$  e  $[BAZ]$  são equiláteros. Mostra que  $AX, BY$  e  $CZ$  concorrem no conjugado isogonal do primeiro ponto isodinâmico.* <sup>6</sup>

**Problema 68.** *Seja  $O$  o circuncentro de  $[ABC]$ ,  $J$  e  $J'$  os dois pontos isodinâmicos e  $K$  o ponto de Lemoine. Prova que  $O, J, J', K$  são colineares.*

**Problema 69** (TST Alemanha 2008). *Sendo  $[ABCD]$  um trapézio isósceles, determina o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $\overline{PA} \times \overline{PC} = \overline{PB} \times \overline{PD}$ .*

**Problema 70** (Ibero 2004). *Dado um triângulo escaleno  $[ABC]$ , seja  $A'$  o pé das bissetrizes internas de  $\angle BAC$  em  $BC$ . Seja  $A''$  a intersecção da mediatriz de  $[AA']$  com  $BC$ . Analogamente definimos  $B''$  e  $C''$ . Prova que  $A'', B''$  e  $C''$  são colineares.*

**Problema 71** (ELMO 2010). *Seja  $[ABC]$  um triângulo inscrito numa circunferência  $\Omega$ , e sejam  $I$  e  $I_A$  o incentro de  $[ABC]$  e o excentro de  $[ABC]$  oposto ao vértice  $A$ , respectivamente. A circunferência inscrita em  $[ABC]$  é tangente a  $[BC]$  em  $D$  e a circunferência ex-inscrita de  $[ABC]$  oposta ao vértice  $A$  é tangente a  $[BC]$  em  $E$ . Uma circunferência é tangente a  $BC$  em  $D$  e ao arco  $BC$  de  $\Omega$  que contém  $A$  em  $T$ . Seja  $S \neq T$  o ponto de intersecção de  $TI$  com  $\Omega$ . Sendo  $M$  o ponto médio do arco  $BC$  de  $\Omega$  que não contém  $A$ , prova que o ponto de intersecção de  $ME$  e  $SI_A$  pertence a  $\Omega$ .*

**Problema 72** (IMO Shortlist 2013). *Seja  $[ABC]$  um triângulo com  $\angle B > \angle C$ . Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos distintos na recta  $AC$  tais que  $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$  e  $A$  está entre  $P$  e  $C$ . Suponhamos que existe um ponto interior  $D$  do segmento  $[BQ]$  tal que  $\overline{PD} = \overline{PB}$ . A recta  $AD$  intersecta a circunferência circunscrita a  $[ABC]$  no ponto  $R \neq A$ . Prova que  $\overline{QB} = \overline{QR}$ .*

**Problema 73** (TST Irão 2012). *Seja  $\mathcal{C}$  o circuncírculo de um triângulo acutângulo  $[ABC]$ ,  $I$  o incentro de  $[ABC]$  e  $D$  o ponto médio do arco  $BAC$  de  $\mathcal{C}$ . Sejam  $E$  e  $F \neq A$  as intersecções de  $DI$  com  $BC$  e  $\mathcal{C}$ , respectivamente. Seja  $P$  o ponto na recta  $AF$  tal que  $PE$  é paralela a  $AI$ . Mostra que  $PE$  é a bissetriz de  $\angle BPC$ .*

<sup>6</sup>O conjugado isogonal de  $J$  é chamado o *ponto de Fermat* e é único ponto  $F$  no interior de  $[ABC]$  tal que  $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$ . Além disso, é conhecido por ser o ponto que minimiza a soma das distâncias aos vértices.

## A Ângulos orientados módulo $\pi$

Em Geometria surgem frequentemente problemas de orientação, e em particular estes problemas surgem quando fazemos angle-chasing. Exemplificando: seja  $X$  um ponto no plano do triângulo  $[ABC]$ . Então temos  $C\hat{A}X + X\hat{A}B = C\hat{A}B$ ? Nem sempre. Só quando  $X$  está no interior do ângulo  $\angle CAB$ . Se  $X$  está fora desse ângulo,  $C\hat{A}B = C\hat{A}X - X\hat{A}B$  ou  $C\hat{A}B = C\hat{A}B = X\hat{A}B - C\hat{A}X$ , dependendo da posição do ponto  $X$ .

Estes sinais que dependem da “posição” dos pontos podem ser bastante incómodos. Para não termos que lidar com estas situações, trabalhamos muitas vezes com ângulos orientados módulo  $\pi$ .

Dadas duas rectas  $k$  e  $l$ ,  $\angle(k, l)$  é o ângulo de uma rotação no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio que transforma  $k$  em  $l$  (ou numa recta paralela a  $l$ ) modulo  $\pi$ , isto é, consideramos que  $\alpha + \pi \equiv \alpha$ . Assim temos as propriedades:

- $\angle(k, l) = -\angle(l, k)$ .
- $\angle(k, l) + \angle(l, m) + \angle(m, k) = 0$  (ou, equivalentemente,  $\angle(k, l) + \angle(l, m) = \angle(k, m)$ ).
- Os pontos  $W, X, Y, Z$  são concíclicos se e só se  $\angle(WY, XY) = \angle(WZ, XZ)$ .

A segunda propriedade “substitui” o facto de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a  $\pi$ . A terceira substitui as clássicas caracterizações de quadriláteros cíclicos.

Reformulemos a propriedade enunciada ao início utilizando esta notação. Temos  $\angle(CA, AX) + \angle(AX, BA) = \angle(CA, BA)$ ; e isto é independente da posição de  $X$ .