POTÊNCIA DE PONTO

A Potência de Ponto é uma das ferramentas mais poderosas para atacar problemas de geometria olímpica. Se ainda restam dúvidas quanto a isso, basta olhar para as provas das IMO dos últimos anos e ver quantos problemas de geometria utilizam Potência de Ponto. Na Shortlist de 2012 este "fenómeno" é ainda mais claro: em 8 problemas de geometria, 5 deles (ao meu conhecimento) podem ser resolvidos com recurso a potência de ponto.

Este artigo tem como objectivo apresentar as já mais do que conhecidas aplicações de Potência de Ponto, como o Teorema das Cordas ou as propriedades do eixo radical; além disso, pretende explorar algumas ideias diferentes não tão conhecidas. Para o seguir, apenas são necessários conceitos de geometria muito simples, como semelhanças e quadriláteros cíclicos, e algum à vontade com vectores (nomeadamente produto escalar, mas tal apenas é necessário para compreender algumas provas).

1. Definição e o Teorema das Cordas

Vamos começar por definir a Potência de um ponto em relação a uma circunferência

Definição 1 (Potência de Ponto)**.** *Dada uma circunferência ω de centro em O e raio r, define-se a* potência do ponto X *em relação a ω como*

$$\operatorname{Pot}(X,\omega) = \overline{OX}^2 - r^2.$$

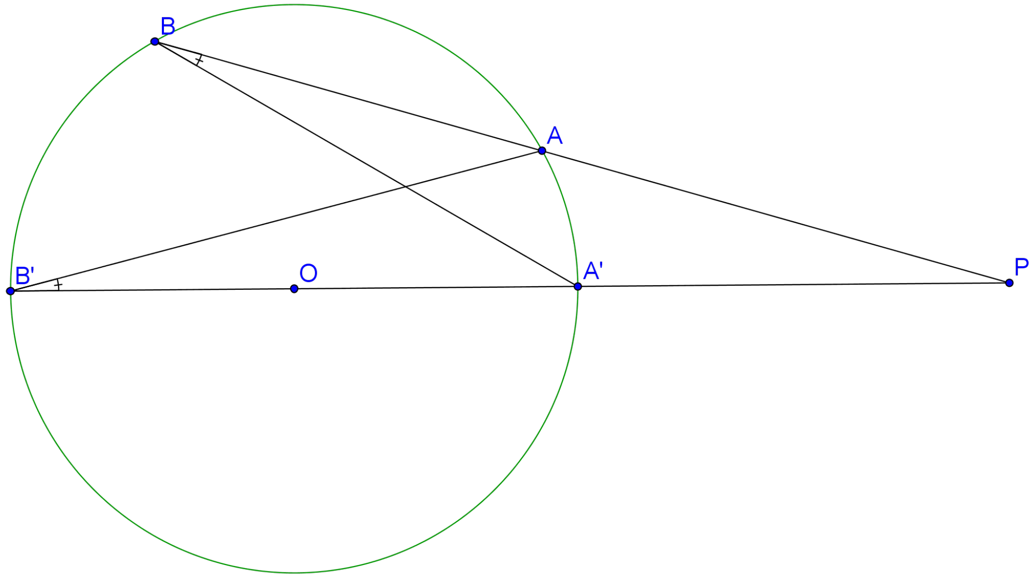
Podemos fazer imediatamente algumas observações quanto à definição. A circunferência ω é então o lugar geométrico dos pontos X tais que $\operatorname{Pot}(X,\omega) = 0$. Além disso, X está no círculo delimitado por ω se e só se $\operatorname{Pot}(X,\omega) \leq 0$. A potência de ponto depende apenas da distância do mesmo ao centro. Mais precisamente, X e Y estão à mesma distância de O se e só se as suas potências são iguais.

No entanto, por si só, a definição não tem grande interesse. Mas o mesmo não se passa com o próximo teorema.

Teorema 1 (Teorema das Cordas)**.** *Seja ω uma circunferência, P um ponto no plano e $A, B \in \omega$ tais que A, B e P são colineares. Então*

$$\operatorname{Pot}(P,\omega) = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}^{1}.$$

[1] Entendemos $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$ como segmentos orientados. Assim, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \overline{AP} \cdot \overline{BP}$ se $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$ têm o mesmo sentido, e $-\overline{AP} \cdot \overline{BP}$ caso contrário.



Prova. Vamos apenas fazer a prova para o caso em que P está fora da circunferência; o caso em que está dentro é totalmente análogo. Sem perda de generaldiade, suponhamos que P está mais próximo de A do que de B. Sejam A' e B' as interseções do diâmetro de ω que passa por P com ω, estando A' mais próximo de P. Por arco-capaz, $\angle PBA' = \angle PB'A$, logo $[B'PA] \sim [BPA']$. Mas assim $\frac{\overline{B'P}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{A'P}}$. Deste modo,

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{A'P} \cdot \overline{B'P} = (\overline{OP} - r)(\overline{OP} + r) = \overline{OP}^2 - r^2 = \mathrm{Pot}(P, \omega).$$

Tal como desejado. □

Existe um caso particular deste teorema interessante. Quando $A \equiv B$, a recta A, B é entendida como a tangente a ω que passa por A; de facto, se considerarmos AB a variar, quando a recta se aproxima da tangente, A aproxima-se de B. Deste modo, se P está na tangente a ω por A, $\mathrm{Pot}(P, \omega) = \overline{AP}^2$.

Vamos parar um pouco para tentar perceber o que nos diz o teorema. O teorema diz-nos que o produto $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ é constante ao variar A, B em ω de forma a que B, A, P sejam colineares. Desse modo, se $[ABCD]$ é um quadrilátero cíclico e $P = AB \cap CD$, então $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP}$. Por outro lado, o converso desta afirmação também é verdadeiro, isto é, se $[ABCD]$ cumpre essa igualdade, então é cíclico.

Teorema 2 (Converso do Teorema das Cordas)**.** *Sejam A, B, C, D quatro pontos e $P = AB \cap CD$. Então $[ABCD]$ é cíclico se e só se $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP}$.*

Prova. Se existe uma circunferência ω tal que $A, B, C, D \in \omega$, então $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \mathrm{Pot}(P, \omega) = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP}$. Para provar a outra implicação, suponhamos que se tem a igualdade do enunciado e seja D' a segunda interseção do circuncírculo de $[ABC]$ com CD; então $[ABCD']$ é cíclico, logo $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{D'P}$, de onde $D \equiv D'$. □

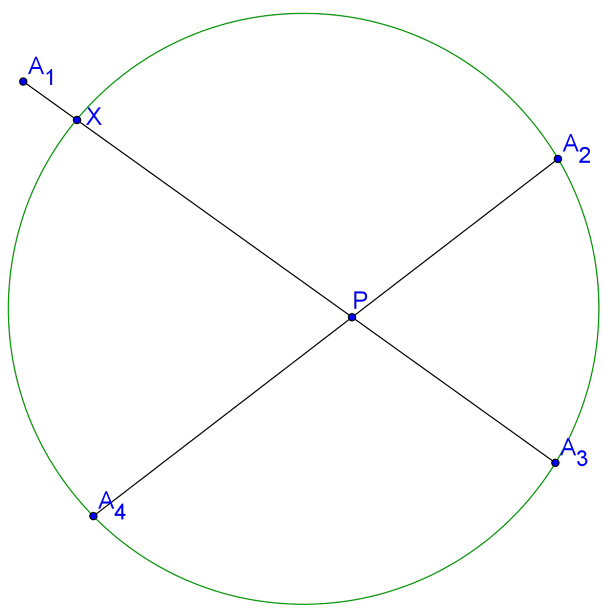
Uma vez mais, o caso no caso em que D, C coincidem interpretamos a recta DC como a tangente por C. Dessa forma, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3. *Seja $[ABC]$ um triângulo e $P \in AB$. Então PC é tangente ao circuncírculo de $[ABC]$ se e só se $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.*

O Converso do Teorema das Cordas é, portanto, um critério para a ciclicidade de um quadrilátero e pode ser muito útil. Por envolver apenas uma igualdade entre comprimentos, torna possível usar contas (trigonometria, métrica, etc.) para provar uma ciclicidade. Além disso, vamos ver que, quando combinado com o eixo radical, vai ter incríveis consequências. Mas antes disso paremos para resolver um problema que apenas usa directamente o Teorema das Cordas e um pequeno truque a reter.

Problema 1 (G2 ISL 2011)**.** *Seja $[A_1A_2A_3A_4]$ um quadrilátero não cíclico. Sejam O_1 e r_1 o circuncentro e circunraio de $[A_2A_3A_4]$, respectivamente; analogamente definem-se O_2, O_3, O_4 e r_2, r_3, r_4. Mostra que*

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}^2 - r_1^2} + \frac{1}{\overline{O_2A_2}^2 - r_2^2} + \frac{1}{\overline{O_3A_3}^2 - r_3^2} + \frac{1}{\overline{O_4A_4}^2 - r_4^2} = 0.$$



Solução. A primeira coisa em que reparamos é que os denominadores são potências de ponto! Mais precisamente, se Γ_i for o circuncírculo de $[A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}]$ (com índices módulo 4), então $\overline{O_iA_i}^2 - r_i^2 = \mathrm{Pot}(A_i, \Gamma_i)$. Como é que podemos calcular estas potências? Não temos inicialmente dois pontos em Γ_1 colineares com A_1, por isso não o podemos fazer imediatamente. Mas podemos criar um ponto que nos permita fazê-lo, por exemplo a segunda intersecção de A_1A_3 com Γ_1; chamemos-lhe X.

Mas para calcular a potência de A_1 em relação a Γ_1 ainda precisamos de conhecer $\overrightarrow{XA_1}$. E como o podemos fazer? É aqui que entra um truque útil e importante: o facto de $[A_2A_3A_4X]$

ser cíclico permite-nos, de certa forma, identificar a posição de X. Seja P a intersecção das diagonais do quadrilátero. Por potência de ponto em Γ_1, temos $\overrightarrow{A_3P} \cdot \overrightarrow{XP} = \overrightarrow{A_2P} \cdot \overrightarrow{A_4P}$; ou seja, conseguimos calcular a posição de X na recta A_1A_3 em função das distâncias de P aos vértices; seja então $x = \overline{A_1P}$, $y = \overline{A_2P}$, $z = \overline{A_3P}$ e $w = \overline{A_4P}$. Assim, pelo que temos acima, $\overline{PX} = \frac{yw}{z}$, e agora calcular a potência é simples. De facto, $\overrightarrow{XA_1} = \overline{PA_1} - \overline{PX} = x - \frac{yw}{z} = \frac{xz-yw}{z}$. Ou seja, $\operatorname{Pot}(A_1, \Gamma_1) = \overrightarrow{XA_1} \cdot \overrightarrow{A_3A_1} = \frac{(xz-yw)(x+z)}{z}$. Analogamente $\operatorname{Pot}(A_2, \Gamma_2) = \frac{(yw-xz)(y+w)}{w}$, $\operatorname{Pot}(A_3, \Gamma_3) = \frac{(xz-yw)(x+z)}{x}$ e $\operatorname{Pot}(A_4, \Gamma_4) = \frac{(yw-xz)(y+w)}{y}$. E agora é trivial calcular a soma como

$$\begin{aligned}
&\frac{z}{(xz-yw)(x+z)} + \frac{w}{(yw-xz)(y+w)} + \frac{x}{(xz-yw)(x+z)} + \frac{y}{(yw-xz)(y+w)} \\
&= \frac{1}{xz-yw}\left(\frac{z}{x+z} + \frac{x}{x+z} - \frac{w}{y+w} - \frac{y}{y+w}\right) = \frac{1}{xz-yw}(1-1) = 0.
\end{aligned}$$

Exactamente como queríamos! □

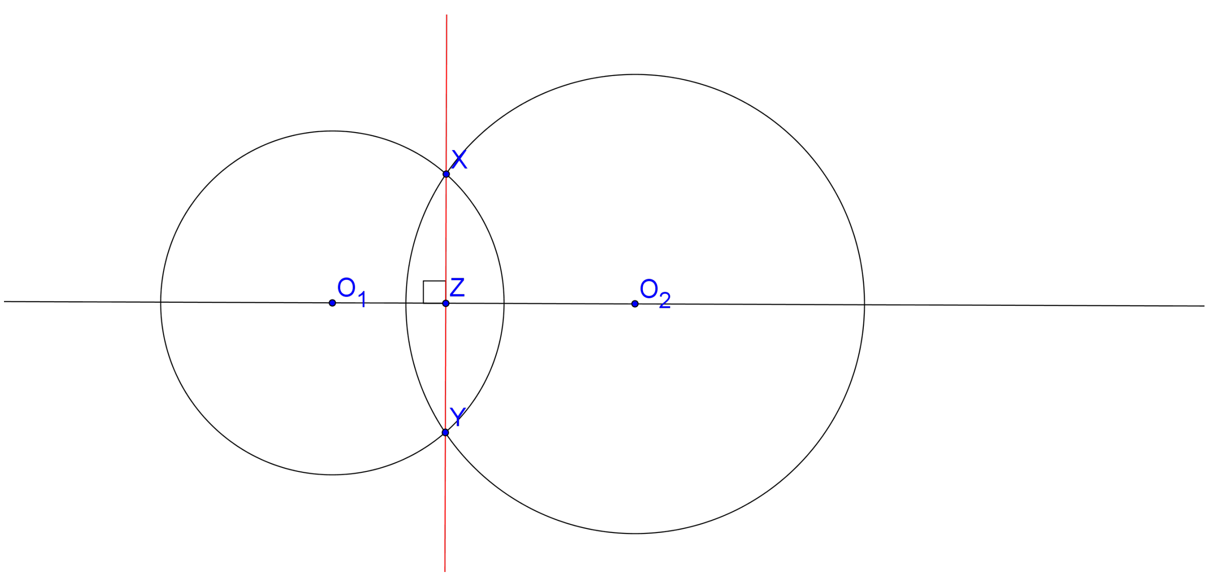
2. Eixo Radical

Definição 2. *Dadas duas circunferências ω_1, ω_2, o* eixo radical *das duas circunferências define-se como o lugar geométrico dos pontos X com igual potência de ponto em relação às duas circunferências, isto é,*

$$\operatorname{Pot}(X, \omega_1) = \operatorname{Pot}(X, \omega_2).$$

A próxima proposição vai caracterizar geometricamente o eixo radical, e é ela a base da sua utilidade.

Proposição 4 (Eixo radical)**.** *Sejam ω_1 e ω_2 duas circunferências de centros O_1 e O_2, respectivamente. Então, o eixo radical de ω_1 e ω_2 é uma recta perpendicular a O_1O_2. Se ω_1, ω_2 se intersectam em X, Y, então o eixo radical é a recta XY; caso sejam tangentes, $X \equiv Y$ e o eixo radical é a tangente comum por X.*



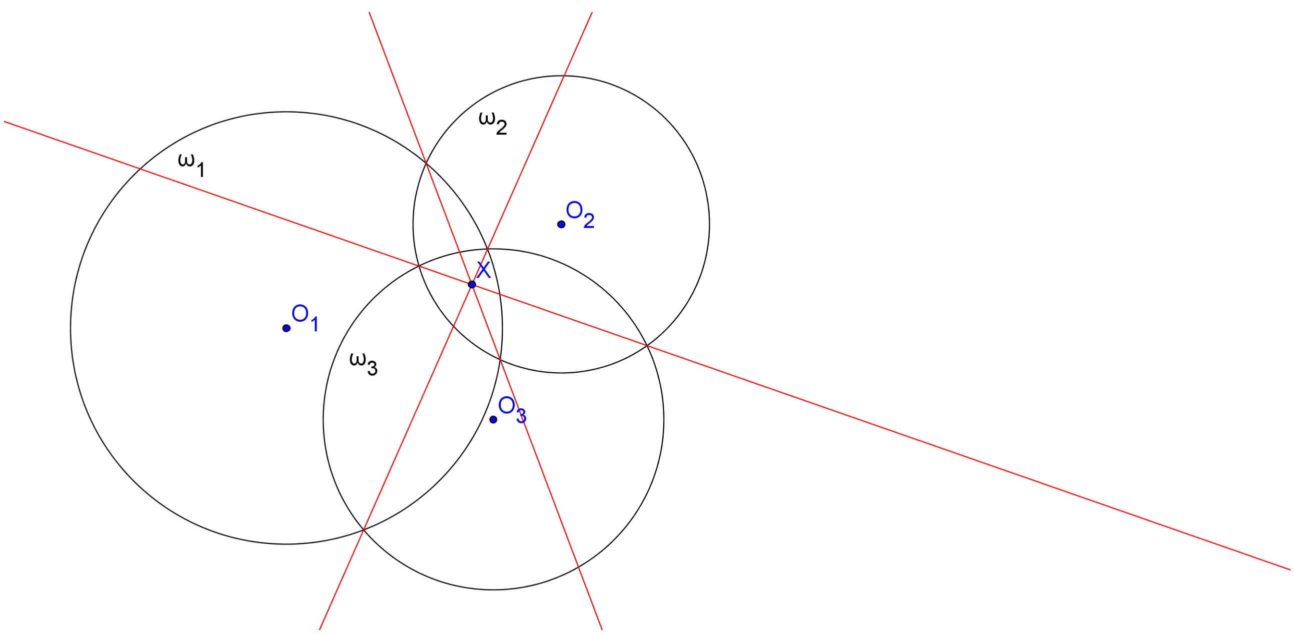
Prova. Começamos por provar que o eixo radical é uma recta perpendicular a O_1O_2. Considerando Z a variar na recta O_1O_2, é fácil ver que existe um único ponto Z nessa recta no eixo radical. Seja X' a projeção ortogonal de X em O_1O_2. Então, pelo Teorema de Pitágoras, $\mathrm{Pot}(X, \omega_1) = \overline{O_1X}^2 - r_1^2 = \overline{O_1X'}^2 + \overline{XX'}^2 - r_1^2$, e uma igualdade análoga para ω_2. Assim,

$$\mathrm{Pot}(X, \omega_1) = \mathrm{Pot}(X, \omega_2) \Leftrightarrow \overline{O_1X'}^2 - \overline{O_2X'}^2 = r_1^2 - r_2^2 = \overline{O_1Z}^2 - \overline{O_2Z}^2 \Leftrightarrow X' \equiv Z.$$

Como tal, X está no eixo radical se e só se $XZ \perp O_1O_2$, ou seja, o eixo radical é a recta que passa por Z perpendicular a O_1O_2, como pretendido. Além disso, se X, Y são as intersecções de ω_1, ω_2, então $\mathrm{Pot}(X, \omega_1) = \mathrm{Pot}(X, \omega_2) = 0 = \mathrm{Pot}(Y, \omega_1) = \mathrm{Pot}(Y, \omega_2)$, logo X e Y estão no eixo radical e, como este é uma recta, a nossa prova termina. □

Esta proposição diz-nos que o eixo radical é uma recta, e rectas são objectos totalmente familiares. Um dos propósitos de identificar determinadas rectas como eixos radicais é que, com eixos radicais, temos uma colinearidade imediata.

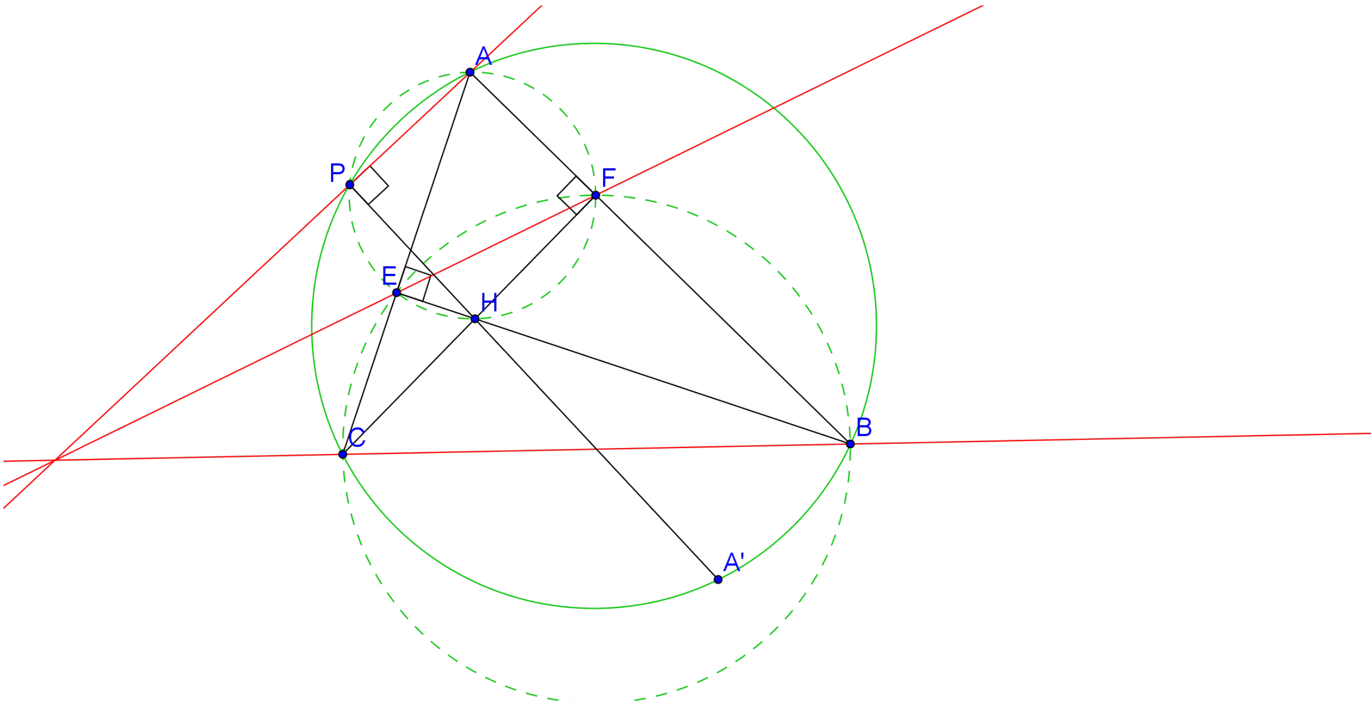
Teorema 5 (Centro Radical)**.** *Sejam ω_1, ω_2 e ω_3 três circunferências com centros não colineares. Então o eixo radical de ω_1, ω_2, o eixo radical de ω_2, ω_3 e o eixo radical de ω_3, ω_1 concorrem num ponto. Se os centros são colineares, os três eixos radicais são paralelos.*



Prova. Se os centros são colineares, então os três eixos radicais são perpendiculares à recta que une os centros, logo são paralelos entre si. Caso contrário, os eixos radicais de ω_1, ω_2 e ω_2, ω_3 não são paralelos, logo concorrem num ponto X. Mas, por definição, para este ponto X temos $\mathrm{Pot}(X, \omega_1) = \mathrm{Pot}(X, \omega_2) = \mathrm{Pot}(X, \omega_3)$, logo X também pertence ao eixo radical de ω_1, ω_3, como pretendido. □

O ponto de concorrência é habitualmente chamado Centro Radical de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Vamos agora passar a um problema relativamente simples para exemplificar como podemos aplicar isto.

Problema 2. *Seja $[ABC]$ um triângulo, H o seu ortocentro, $E = BH \cap AC$, $F = CH \cap AB$ e A' o ponto diametralmente oposto a A em relação ao circuncírculo de $[ABC]$; por fim, seja P a outra interseção de $A'H$ com o circuncírculo de $[ABC]$. Mostra que AP, EF e BC concorrem.*



Solução. Observe-se que, como A e A' são pontos diametralmente opostos, $\angle APH = \frac{\pi}{2} = \angle AEH = \angle AFH$, logo $[APEHF]$ é cíclico; seja ω_1 a circunferência circunscrita a esse quadrilátero. Também $[BCEF]$ e $[APCB]$ são obviamente cíclicos; sendo ω_2 e ω_3 as circunferências circunscritas a esses quadriláteros, temos agora, pela Proposição 3, que AF é o eixo radical de ω_1, ω_3, EF de ω_1, ω_2 e BC de ω_2, ω_3. Como tal, as três rectas intersectam-se no centro radical de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, como pretendido. □

Neste problema essencialmente o que fizemos foi identificar as rectas que queremos provar que são concorrentes como eixos radicais de três circunferências, para assim poder aplicar o Centro Radical. Esta estratégia é comum a vários outros problemas.

O Centro Radical dá-nos uma concorrência a partir de uma ciclicidade. No entanto, graças ao converso do teorema das cordas, também podemos obter uma ciclicidade a partir de uma concorrência.

Teorema 6. *Sejam ω_1, ω_2 duas circunferências e $A, B \in \omega_1$, $C, D \in \omega_2$. Então, $[ABCD]$ é cíclico se e só se AB e CD concorrem no eixo radical de ω_1, ω_2.*

Prova. Se $[ABCD]$ é cíclico, a concorrência vem do Teorema do Centro Radical. Suponhamos agora que $P = AB \cap CD$ está no eixo radical. Então, por definição do mesmo,

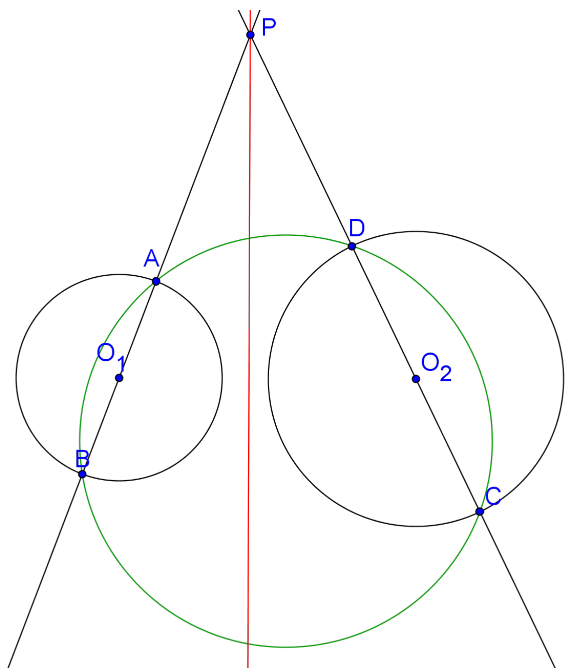
$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \mathrm{Pot}(P, \omega_1) = \mathrm{Pot}(P, \omega_2) = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP}.$$

E pelo converso do Teorema das Cordas temos o pretendido. □

Daremos mais uma aplicação destas ideias. O problema seguinte é das Olimpíadas Iberoamericanas de 99; com o material deste artigo, o problema deve ser absolutamente directo, mas sem termos a Potência de Ponto à nossa disposição torna-se bastante complicado.

Problema 3. *Dadas duas circunferências $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ dizemos que $\mathcal{M}$ bissecta $\mathcal{N}$ se a corda comum às duas circunferências é um diâmetro de $\mathcal{N}$.*

(1) Mostra que, dadas circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, existem infinitas circunferências $\mathcal{M}$ que bissectam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.
(2) Qual é o lugar geométrico do centro das circunferências $\mathcal{M}$ da alínea anterior?



Solução de 1. Resolvemos apenas a primeira alínea; o leitor interessado, após as próximas secções, poderá resolver facilmente a segunda. Seja $[AB]$ um diâmetro de $\mathcal{C}_1$ e $[CD]$ um diâmetro de $\mathcal{C}_2$. Então, queremos que $[ABCD]$ seja cíclico. Mas para o fazer, pelo teorema 6, basta que $AB \cap CD$ esteja no eixo radical das circunferências! Assim, a construção é fácil; consideramos um ponto P no eixo radical de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e definimos A, B como as interseções de PO_1 com $\mathcal{C}_1$ (onde O_1 é o centro de $\mathcal{C}_1$), e analogamente C, D. Pelo Teorema 6, $[ABCD]$ é cíclico, e é evidente que a circunferência circunscrita a esse quadrilátero bissecta $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. $\square$

Vamos agora abordar muito levemente circunferências ortogonais e apresentar um resultado sobre estas que serve basicamente como mais um exemplo. Vamos definir circunferências ortogonais:

Definição 3 (Circunferências Ortogonais)**.** *Duas circunferências ω_1, ω_2 que se intersectam dizem-se* ortogonais *se $\angle O_1XO_2 = \angle O_1YO_2 = \frac{\pi}{2}$ onde O_1 e O_2 são os centros de ω_1, ω_2 respectivamente e X, Y as intersecções das circunferências.*

Existem algumas definições alternativas para circunferências ortogonais. Dizer que $\angle O_1XO_2 = \angle O_1YO_2 = \frac{\pi}{2}$ é o mesmo que dizer que XO_2 e YO_2 são tangentes a ω_1. Além disso, pelo teorema de Pitágoras, a ortogonalidade é também equivalente a $\overline{O_1O_2}^2 = r_1^2 + r_2^2$ onde r_1 e r_2 são os raios de ω_1 e ω_2. O leitor pode ainda verificar que ω_1 e ω_2 são ortogonais se e só se uma inversão em ω_1 envia ω_2 para si própria.

Proposição 7. *Sejam ω_1 e ω_2 duas circunferências. Se ω é ortogonal a ω_1 e ω_2, então o centro de ω está no eixo radical de ω_1 e ω_2.*

Prova. Sejam O_1, O_2, O os centros de ω_1, ω_2 e ω, respectivamente, e r_1, r_2, r os seus raios. Pela ortogonalidade, tem-se

$$\mathrm{Pot}(O, \omega_1) = \overline{OO_1}^2 - r_1^2 = r^2 = \overline{OO_2}^2 - r_2^2 = \mathrm{Pot}(O, \omega_2).$$

O que demonstra o pretendido pela definição de eixo radical. □

3. Perpendicularidades

A definição de Potência de Ponto contém quadrados de distâncias, e quadrados de distâncias lembram imediatamente perpendicularidades devido ao teorema de Pitágoras. São, além disso, muito fáceis de trabalhar algebricamente. Nesta secção vamos ver como nos podemos aproveitar do que sabemos sobre Potência de Ponto para provar perpendicularidades.

Lema 8. *Sejam A, B, C, D quarto pontos no plano. Então $AC \perp BD$ é equivalente a*

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2.$$

Prova. Basta observar a seguinte identidade:

$$(\vec{A} - \vec{B})^2 + (\vec{C} - \vec{D})^2 - (\vec{A} - \vec{D})^2 - (\vec{B} - \vec{C})^2 = 2(\vec{A} - \vec{C})(\vec{D} - \vec{B}). \quad \square$$

Corolário 9. *Sejam ω_1 e ω_2 duas circunferências com centros O_1 e O_2. Então $XY \perp O_1O_2$ se e só se*

$$\mathrm{Pot}(X, \omega_1) - \mathrm{Pot}(X, \omega_2) = \mathrm{Pot}(Y, \omega_1) - \mathrm{Pot}(Y, \omega_2).$$

Este corolário é, de certo modo, uma generalização da proposição 4, pois diz-nos que o lugar geométrico dos pontos tais que $\mathrm{Pot}(X, \omega_1) - \mathrm{Pot}(X, \omega_2)$ é constante é uma recta perpendicular a O_1O_2. Embora o corolário 9 possa parecer totalmente equivalente ao lema 8, a diferença reside no simples facto de o corolário 9 nos permitir usar as ferramentas que já desenvolvemos relativas à Potência de Ponto. Antes de passar a uma aplicação disto, vamos dar mais um lema que envolve perpendicularidades e a sua versão com Potência de Ponto.

Lema 10 (Carnot)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo e X, Y, Z pontos no plano. Então as perpendiculares a $[BC]$ por X, $[AC]$ por Y e $[AB]$ por Z concorrem se e só se*

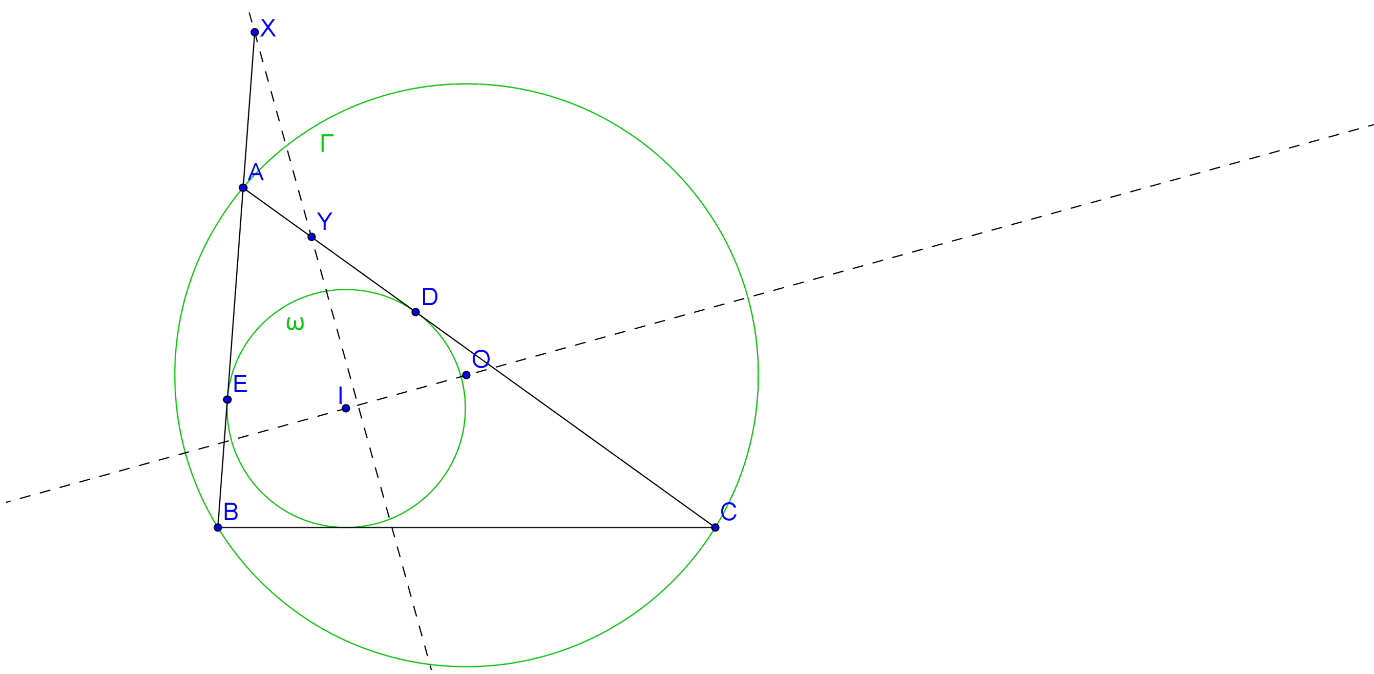
$$\overline{BX}^2 - \overline{XC}^2 + \overline{CY}^2 - \overline{YA}^2 + \overline{AZ}^2 - \overline{ZB}^2 = 0.$$

Corolário 11. *Sejam $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ circunferências de centros O_1, O_2 e O_3 e X, Y, Z pontos no plano. Então as perpendiculares a $[O_2O_3]$ por X, $[O_1O_3]$ por Y e $[O_1O_2]$ por Z concorrem se e só se*

$$\mathrm{Pot}(X, \omega_2) - \mathrm{Pot}(X, \omega_3) + \mathrm{Pot}(Y, \omega_3) - \mathrm{Pot}(Y, \omega_1) + \mathrm{Pot}(Z, \omega_1) - \mathrm{Pot}(Z, \omega_2) = 0.$$

As provas do lema 10 e do corolário 11 são uma simples utilização do lema 8, e são deixadas ao leitor. Vamos finalmente ver como isto funciona num problema.

Problema 4. *Seja $[ABC]$ um triângulo com incentro I e circuncentro O. Sejam X e Y pontos nas semirectas $\dot{B}A$ e $\dot{C}A$, respectivamente, tais que $\overline{BX} = \overline{BC} = \overline{CY}$. Mostra que $XY \perp OI$.*



Solução. Queremos provar a perpendicularidade de uma recta com dois centros de circunferências conhecidas, o incírculo ω e o circuncírculo Γ. Parece ser bastante complicado relacionar directamente os pontos X e Y com O e I. No entanto, podemos usar o Teorema das Cordas para calcular as potências X e Y em relação ao circuncírculo e ao incírculo. Observe-se que $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{BX} - \overrightarrow{BA} = a - c$. Dessa forma, pelo Teorema das Cordas, $\mathrm{Pot}(X, \Gamma) = \overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{AX} = a(a - c)$. Por outro lado, sendo E o ponto de tangência de ω com AB, é conhecido que $\overline{AE} = s - a$, onde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Deste modo, $\overrightarrow{EX} = (s - a) + (a - c) = s - c$, e portanto $\mathrm{Pot}(X, \omega) = (s - c)^2$. Simplificando, $\mathrm{Pot}(X, \Gamma) - \mathrm{Pot}(X, \omega) = a^2 + bc - s^2$; por simetria, $\mathrm{Pot}(X, \Gamma) - \mathrm{Pot}(X, \omega) = \mathrm{Pot}(Y, \Gamma) - \mathrm{Pot}(Y, \omega)$ e terminamos pelo corolário 8. $\square$

4. Linearidade

Nesta secção chegamos finalmente à parte interessante e razoavelmente nova. O corolário 9 mostra-nos como a função $\operatorname{Pot}(X,\omega_1) - \operatorname{Pot}(X,\omega_2)$ parece ter algum interesse. Nesta secção vamos estudá-la um pouco melhor e ver como nos podemos aproveitar das suas propriedades 'algébricas'. Para entender isto, vamos a uma definição:

Definição 4 (Função Linear). *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é linear se, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^2$, temos $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.*

Isto é o mesmo que dizer que se conhecermos f nos pontos X e Y, podemos estender a função linearmente a toda a recta XY. Sendo $v \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = v \cdot x + c$ é linear (em que $v \cdot x$ é o produto escalar); de facto, estas são as únicas funções lineares, como não é difícil demonstrar. Uma função linear pode ser definida totalmente apenas por 3 pontos. Para o fazer, precisamos de coordenadas baricêntricas.

Definição 5 (Coordenadas Baricêntricas). *Sejam A, B, C três pontos não colineares. Então as coordenadas baricêntricas de X são o único terno de reais (α, β, γ) tal que $\vec{X} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$ e $\alpha + \beta + \gamma = 1$.*

Uma vez que $\alpha+\beta+\gamma = 1$, a expressão $\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}$ não depende do referencial e, portanto, faz sentido. Se f é uma função linear, então $f(X) = \alpha f(A) + \beta f(B) + \gamma f(C)$ onde (α, β, γ) são as coordenadas baricêntricas de X. Mas afinal a que propósito vêm estas funções lineares?

Proposição 12 (Linearidade). *Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_n$ circunferências e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reais tais que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$. Então a função*

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{Pot}(X, \omega_j)$$

é linear. Em particular, para $n = 2$, a função $f(X) = \operatorname{Pot}(X,\omega_1) - \operatorname{Pot}(X,\omega_2)$ é linear.

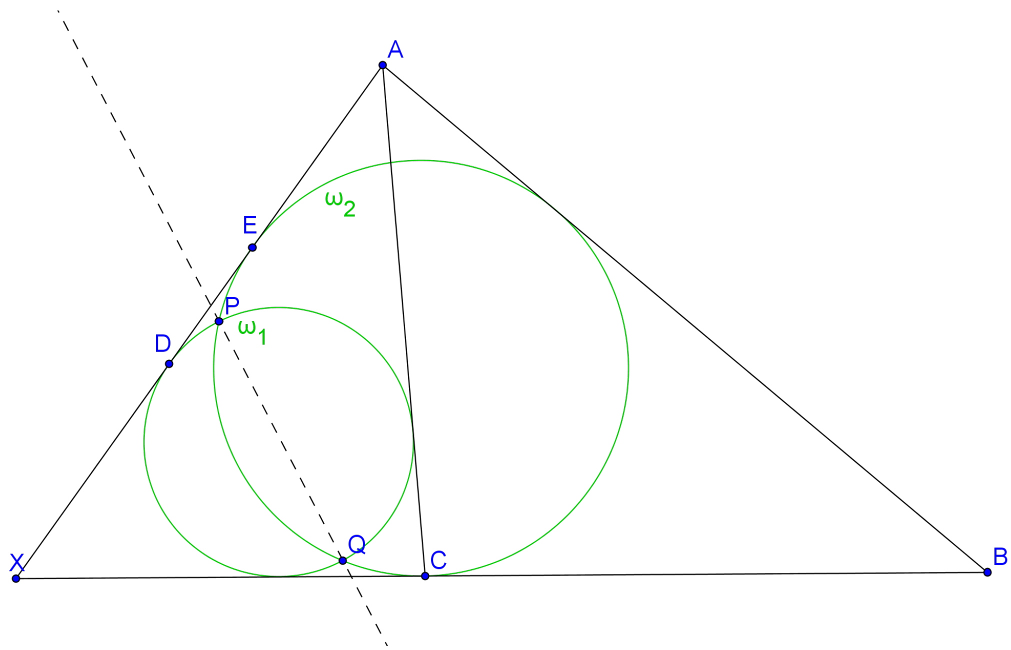
Prova. Sejam O_j e r_j os centro e raio de ω_j, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} f(X) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j[(\vec{O_j} - \vec{X})^2 - r_j^2] &= \vec{X}^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) - 2\vec{X}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{O_j}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\vec{O_j}^2 - r_j^2)\right) \\ &= -2\vec{X}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{O_j}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\vec{O_j}^2 - r_j^2)\right). \end{aligned}$$ □

Em geral, como podemos ver pela expansão, quando $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = S$ não é 0, a função $f(X)$ vai ser a potência de ponto de uma certa circunferência com centro em $\frac{1}{S}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{O_j}$, e $f(X) = 0$ vai ser a equação dessa circunferência. Quando $S = 0$, a circunferência degenera para uma recta.

Até agora, aquilo que temos não parece mais do que uma curiosidade algébrica. Mas afinal como podemos aplicar isto a problemas de geometria? Vamos de seguida ver uma aplicação desta ideia resolvendo o G7 de 2004, problema no qual este método se mostra muito eficiente.

Problema 5 (G7 2004)**.** *Dado um triângulo $[ABC]$, seja X um ponto variável na recta BC tal que C está entre B e X e os incírculos de $[ABX]$ e $[ACX]$ se intersectam em dois pontos distintos P e Q. Mostra que a recta PQ passa por um ponto independente de X.*



Prova. Começamos com alguma notação. Dado X, definimos ω_1 e ω_2 como os incírculos de $[AXC]$ e $[AXB]$, respectivamente, e consideramos a função $f_X(T) = \text{Pot}(T, \omega_1) - \text{Pot}(T, \omega_2)$; para cada X, esta função é linear. Ora nós queremos encontrar um ponto T que está no eixo radical de ω_1, ω_2 para todo o X, isto é, um ponto P tal que $f_X(T) = 0$ para todo o X.

Pela linearidade de f_X, se soubermos $f_X(A), f_X(B)$ e $f_X(C)$, podemos definir a função e, desse modo, escolher T pelas suas coordenadas baricêntricas de forma apropriada; vamos calcular $f_X(A)$. Seja $t = \overline{AX} - \overline{CX}$, $D = AX \cap \omega_1$ e $E = AX \cap \omega_2$. Então é conhecido que $\overline{DA} = \frac{1}{2}(\overline{AX} + \overline{AC} - \overline{XC}) = \frac{1}{2}(t + b)$ e $\overline{EA} = \frac{1}{2}(\overline{AX} + \overline{AB} - \overline{BX}) = \frac{1}{2}(t + c - a)$. Daqui,

$$f_X(A) = \overline{DA}^2 - \overline{EA}^2 = \frac{1}{4}(b - c + a)(2t + b + c - a) = M_A t + N_A$$

para constantes M_A, N_A apropriadas. De facto, podemos mostrar de forma análoga que também $f_X(B) = M_B t + N_B$ e $f_X(C) = M_C t + N_C$ para certas constantes M_B, M_C, N_B e N_C. Consideremos agora α, β, γ tais que $\alpha M_A + \beta M_B + \gamma M_C = \alpha N_A + \beta N_B + \gamma N_C = 0$ e $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (é fácil ver que existem). Então, para o ponto T com coordenadas baricêntricas (α, β, γ), que não dependem de X, tem-se $f_X(T) = \alpha f_X(A) + \beta f_X(B) + \gamma f_X(C) = 0$, como pretendido. $\square$

Este problema é bastante difícil de abordar sinteticamente (não fosse um G7), mas conseguimos resolvê-lo quase sem chegar mesmo a fazer contas. Se calcularmos explicitamente todas as constantes M e N e resolvermos o sistema, podemos ver que o ponto T tem coordenadas baricêntricas $\frac{1}{4a}(2a, a - b - c, a + b + c)$, mas isso não é necessário para a solução. Vamos ver agora quando é que f, como definida em 12, é, além de linear, constante.

Proposição 13. *Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_n$ circunferências de centros $O_1, \ldots, O_n$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reais com soma 0, e $f(X) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{Pot}(X, \omega_j)$. Então $f(X)$ é constante se e só se $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{O_j} = 0$. Em particular, para $n = 3$, existem tais reais se e só se O_1, O_2, O_3 são colineares.*

Prova. Considere-se a expansão na prova da proposição 12, e o enunciado é evidente. Para o caso $n = 3$, como a soma dos λ é 0, $\lambda_1 \vec{O_1} + \lambda_2 \vec{O_2} + \lambda_1 \vec{O_3} = 0$ é equivalente a $\lambda_1 O_1 \vec{O_3} + \lambda_2 O_2 \vec{O_3} = 0$, de onde a afirmação é óbvia. □

Neste momento estamos em condições para mostrar uma nova solução do problema 1. Esta tem um aspecto algébrico e muito elegante!

Solução do Problema 1. Novamente definimos Γ_i como o circuncírculo de $[A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}]$ e notamos que os denominadores são simplesmente $\mathrm{Pot}(A_i, \Gamma_i)$. Para resolver o problema, gostaríamos de arranjar algum tipo de relação entre as funções $\mathrm{Pot}(X, \Gamma_i)$. Mas a proposição 13 vai permitir-nos obter uma dependência dependência linear entre estas potências! Consideremos reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \neq 0$ tais que $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \vec{O_i} = 0$; tais reais existem pois são simplesmente a solução de um sistema de três equações lineares e homogéneas com 4 variáveis (e um sistema nessas condições tem uma solução não trivial). Então, pela proposição 13, a função $f(X) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{Pot}(X, \Gamma_i)$ é constante, ou seja, $f(X) = \lambda$ para todo o X ($\lambda \neq 0$, já que $[A_1A_2A_3A_4]$ não é cíclico).

Agora avaliamos $f(X)$ em A_i. Como $A_i \in \Gamma_j$ para $i \neq j$, $\mathrm{Pot}(A_i, \Gamma_j) = 0$. Assim, $\lambda = f(A_i) = \lambda_i \mathrm{Pot}(A_i, \Gamma_i)$. Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\mathrm{Pot}(A_i, \Gamma_i)} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \right) = 0.$$

E aqui simplesmente usámos que a soma dos λ_i é zero, resolvendo mais uma vez o problema. □

Na própria Shortlist de 2011 é apresentada uma solução alternativa algébrica que utiliza analítica e que, de certa forma, é análoga a esta (pois essencialmente utiliza que a equação de uma circunferência é algo da forma $x^2 + y^2 + \ell(x, y) = 0$ onde ℓ é linear). No entanto, esperamos que, com tudo o que já vimos até aqui, a solução apresentada pareça um pouco menos caída do céu. Não é difícil generalizar o problema para dimensões superiores. Vamos agora utilizar a última proposição para dar um critério simples para a coaxalidade de circunferencias.

Proposição 14. *Três circunferências ω_1, ω_2 e ω_3 partilham o mesmo eixo radical se e só se existem reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ com soma igual a 0 tais que*

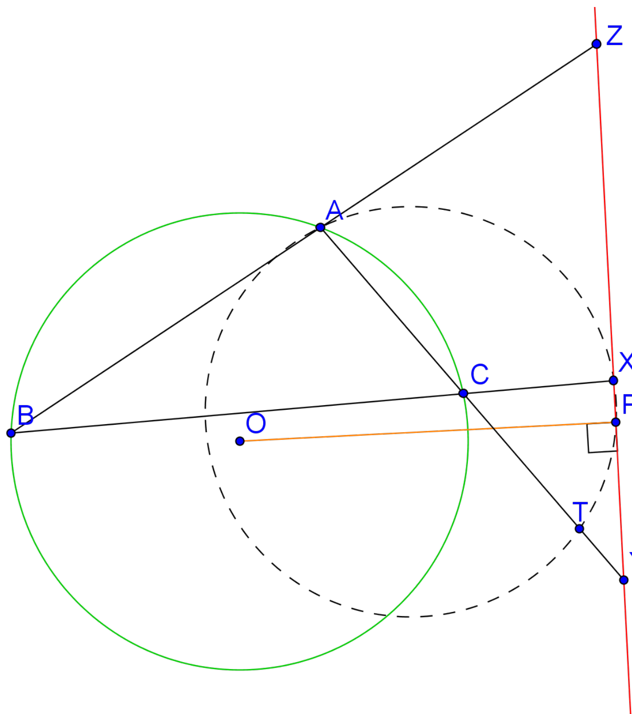
$$\lambda_1 \mathrm{Pot}(X, \omega_1) + \lambda_2 \mathrm{Pot}(X, \omega_2) + \lambda_3 \mathrm{Pot}(X, \omega_3) = 0$$

para todo o X.

Prova. Se existem tais reais, considerando X no eixo radical de ω_1, ω_2 temos $\mathrm{Pot}(X, \omega_1) = \mathrm{Pot}(X, \omega_2)$, e portanto também $\mathrm{Pot}(X, \omega_3) = \mathrm{Pot}(X, \omega_1) = \mathrm{Pot}(X, \omega_2)$, logo os eixos radicais de ω_1, ω_2 e ω_1, ω_3 e ω_2, ω_3 coincidem. Por outro lado, se as circunferências partilham o mesmo eixo então os seus centros são colineares, e pela proposição 13 existem reais com soma 0 tais que $f(X) = \lambda_1 \mathrm{Pot}(X, \omega_1) + \lambda_2 \mathrm{Pot}(X, \omega_2) + \lambda_3 \mathrm{Pot}(X, \omega_3)$ é constante; mas para X no eixo radical comum temos obviamente $f(X) = 0$, logo f é identicamente nula. □

Após isto, estamos prontos para resolver o G8 de 2012, um dos principais problemas que motivou a escrita deste artigo (em particular, esta secção) e que, como vamos ver, usará muitas das ideias aqui presentes.

Problema 6 (G8 ISL 2012)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com circuncírculo ω e uma recta que não intersecta ℓ. Denotamos por P a projeção ortogonal do centro de ω em ℓ. As rectas BC, CA e AB intersectam ℓ nos pontos X, Y, Z diferentes de O. Mostra que os circuncírculos de $[AXP], [BYP]$ e $[CZP]$ têm um ponto comum diferente de P ou são mutuamente tangentes em P.*



Solução. Definimos ω_1, ω_2 e ω_3 como os circuncírculos de $[AXP], [BYP]$ e $[CZP]$ respectivamente. Como as três circunferências já se intersectam em P, o enunciado pede simplesmente para provar que $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ são coaxiais! Ou seja, queremos mostrar que existem reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ com soma 0 tais que $f(W) = \lambda_1 \text{Pot}(W, \omega_1) + \lambda_2 \text{Pot}(W, \omega_2) + \lambda_3 \text{Pot}(W, \omega_3) = 0$ para todo o W. Vamos procurar reais λ_i que satisfaçam isto; para escolher estes reais, vamos olhar para pontos em que as suas potências são fáceis de calcular, e os pontos na recta ℓ parecem ideais. Se $W \in \ell$, $\text{Pot}(W, \omega_1) = \overrightarrow{PW} \cdot \overrightarrow{XW}$. Assim, $f(X) = \overrightarrow{PW} \cdot \left(\lambda_1 \overrightarrow{XW} + \lambda_2 \overrightarrow{YW} + \lambda_3 \overrightarrow{ZW}\right)$, e queremos que o que está dentro dos parênteses seja 0; uma vez que a soma dos λ_i deve ser 0, o interior do parêntese é simplesmente $\lambda_1 \vec{X} + \lambda_2 \vec{Y} + \lambda_3 \vec{Z}$. Como X, Y, Z são colineares, é fácil ver que existem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de soma 0 tais que isso é 0; de agora em diante estes serão os λ_i que utilizaremos e vamos provar que, para esses, $f(X)$ é nula.

A definição anterior dá automaticamente que f desvanesce ℓ, mas para garantir que f é idênticamente nula precisamos de mostrar que desvanesce em três pontos não colineares (pois sabemos pela proposição 12 que f é linear). Olhando para o desenho, temos duas opções: os vértices A, B, C ou o circuncentro O (em conjunto com os pontos da recta ℓ). A segunda opção, apesar de ser mais simétrica, parece má ideia pois calcular as potências de O não aparenta ser agradável; já a primeira parece exequível utilizando o truque na solução original do Problema 1. Vamos então calcular as potências de C em relação a ω_1 e ω_2 para provar que $f(C) = 0$ (note-se que $\text{Pot}(C, \omega_3) = 0$ trivialmente).

Calculamos $\operatorname{Pot}(C,\omega_1)$, e para isso seja T a segunda intersecção de AC com ω_1. Pelo Teorema das cordas em ω_1, $\overrightarrow{AY}\cdot\overrightarrow{TY}=\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{PY}$, ou seja, $\overrightarrow{TY}=\frac{\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{PY}}{\overrightarrow{AY}}$; desse modo, $\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TY}-\overrightarrow{CY}=\frac{\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{PY}-\overrightarrow{AY}\cdot\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{AY}}$. Podemos já calcular a potência; para reduzir o número de comprimentos com que estamos a trabalhar, vamos utilizar que $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{PY}-\overrightarrow{PX}$, obtendo

$$\begin{aligned}\operatorname{Pot}(C,\omega_1)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{TC}&=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{PY}-\overrightarrow{AY}\cdot\overrightarrow{CY}\right)}{\overrightarrow{AY}}\\&=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AY}}\cdot\left(\overline{PY}^2-\overrightarrow{AY}\cdot\overrightarrow{CY}-\overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{PY}\right).\end{aligned}$$

Analogamente temos que

$$\operatorname{Pot}(C,\omega_2)=\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BX}}\cdot\left(\overline{PX}^2-\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{CX}-\overrightarrow{PY}\cdot\overrightarrow{PX}\right).$$

Ainda temos expressões demasiado grandes e que envolvem demasiada coisa, pelo que parece má ideia provar já que $f(C)=0$ com o que temos. Além disso, ainda não utilizámos a condição de $OP\perp\ell$; mas esta condição não parece nada desagradável com as ideias da secção 3, que mostram como aproveitar a definição de potência de ponto com quadrados para a relacionar com perpendicularidades. E de facto temos, por Pitágoras, que $\overline{OX}^2-\overline{PX}^2=\overline{OP}^2=\overline{OY}^2-\overline{PY}^2$, ou seja,

$$\overline{PX}^2-\overline{PY}^2=\overline{OX}^2-\overline{OY}^2=\operatorname{Pot}(X,\omega)-\operatorname{Pot}(Y,\omega)=\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{CX}-\overrightarrow{AY}\cdot\overrightarrow{CY}.$$

Mas isso diz precisamente que o que está entre parênteses nas duas expressões para $\operatorname{Pot}(C,\omega_1)$ e $\operatorname{Pot}(C,\omega_2)$ é igual, ou seja, $\overline{PY}^2-\overrightarrow{AY}\cdot\overrightarrow{CY}-\overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{PY}=\overline{PX}^2-\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{CX}-\overrightarrow{PY}\cdot\overrightarrow{PX}$! Desse modo, para que $f(C)=\lambda_1\operatorname{Pot}(C,\omega_1)+\lambda_2\operatorname{Pot}(C,\omega_2)=0$, basta que $\lambda_1\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AY}}+\lambda_2\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BX}}=0$. Pela definição dos λ_i, notando que $\lambda_3=-\lambda_1-\lambda_2$, sabemos que $0=\lambda_1\vec{X}+\lambda_2\vec{Y}+\lambda_3\vec{Z}=\lambda_1\overrightarrow{XZ}+\lambda_2\overrightarrow{YZ}$, e portanto $\frac{\overrightarrow{XZ}}{\overrightarrow{ZY}}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. E assim estamos a uma simples utilização do Teorema de Menelaus de terminar o problema, concretamente no triângulo $[XCY]$ e transversal BAZ, que nos dá

$$-1=\frac{\overrightarrow{XZ}}{\overrightarrow{ZY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YA}}{\overrightarrow{AC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BX}}=\frac{\frac{\lambda_2\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BX}}}{\frac{\lambda_1\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AY}}}.$$

E isso é equivalente ao que queríamos, provando que de facto $f(C)=0$. De forma análoga $f(A)=f(B)=0$, e portanto $f\equiv 0$, o que termina o problema pela proposição 14. □

Esta solução deve convencer o leitor do poder deste método. Apesar do aspecto, a solução não envolveu realmente grandes contas; de facto, ao escrever a condição $OP\perp\ell$ cortaram todos os segmentos desagradáveis de trabalhar. Além disso, todas as partes da solução foram bastante naturais, como esperamos que o leitor tenha entendido.

A linearidade, não sendo naturalmente utilizável em todos os problemas, parece ser uma muito útil ferramenta. Vimos que esta pode ser usada como forma de fazer baricêntricas evitando as piores contas (como no problema 5), em conjunto com algumas contas com segmentos para calcular potências (problema 6) ou para produzir soluções simples, elegantes e sem contas (como a apresentada ao problema 1). Na secção seguinte podem ser encontrados mais alguns problemas que utilizem estas ideias.

5. Problemas

Neste secção encontra-se uma colectânea de problemas que têm uma possível solução com Potência de Ponto e com aquilo que foi apresentado no artigo. A maior parte (todos?) tem soluções alternativas, e para alguns a solução 'standart' nem sequer utiliza Potência de Ponto, mas encorajamos o leitor a procurar uma que use. A ordem dos problemas tenta seguir vagamente a ordem do artigo.

Problema 7 (Teste Delfos 2013)**.** *Sejam A, B e C três pontos de uma circunferência de centro O tais que $\angle ACB$ é obtuso. A corda $[AB]$ corta a circunferência de diâmetro $[OC]$ nos pontos D e E. Sabendo que $\overline{AD} = 3$ e $\overline{BD} = 4$, determina $\overline{CD}$.*

Problema 8 (2 EMC 2012)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo com ortocentro H. As rectas AH e CH intersectam BC e AB em A_1 e C_1, respectivamente. Seja D a intersecção de BH e A_1C_1, D' a reflexão de D em AC e P o ponto médio de $[BH]$. Mostra que o quadrilátero $[APCD']$ é cíclico.*

Problema 9 (1 USAMO 2009)**.** *Dadas cuas circunferências ω_1 e ω_2 que se intersectam em X e Y, seja ℓ_1 uma recta pelo centro de ω_1 que intersecta ω_2 em P e Q e seja ℓ_2 uma recta que passa pelo centro de ω_2 e que intersecta ω_1 em R e S. Mostra que se $[PQRS]$ é cíclico, então o centro da sua circunferência circunscrita está em XY.*

Problema 10 (2 OIAM 2003)**.** *Sejam C e D dois pontos num semicírculo de diâmetro $[AB]$ tais que B e C estão em lados distintos da recta AD. Sejam M, N, P os pontos médios de $[AC]$, $[BD]$ e $[CD]$, respectivamente. Sejam O_A e O_B os circuncentros dos triângulos $[ACP]$ e $[BDP]$. Mostra que O_AO_B e MN são rectas paralelas.*

Problema 11 (4 IMO 2013)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo com com ortocentro H, e seja W um ponto no segmento $[BC]$. Os pontos M e N são os pés das alturas de B e C, respectivamente. Seja ω_1 o circuncírculo de BWN, e X o ponto em ω_1 tal que $[WX]$ é um diâmetro de ω_1. Analogamente, seja ω_2 o circuncírculo de $[CWM]$ e Y o ponto tal que $[WY]$ é um diâmetro de ω_2. Mostra que X, Y e H são colineares.*

Problema 12 (4 EMC 2013)**.** *Dado um triângulo $[ABC]$, sejam D, E e F as projeções ortogonais de A, B e C nos lados opostos, respectivamente. Sejam X, Y, Z os pontos médios de $[AD], [BE]$ e $[CF]$, respectivamente. Mostra que as perpendiculares a YZ por D, a XZ por E e a XY por F são concorrentes.*

Problema 13 (G6 ISL 2012)**.** *Seja $[ABC]$ triângulo com circuncentro O e incentro I. Os pontos D, E e F estão nos lados BC, CA e AB, respectivamente, e são tais que $\overline{BD} + \overline{BF} = \overline{CA}$ e $\overline{CD} + \overline{CE} = \overline{AB}$. Os circuncírculos dos triângulos $[BFD]$ e $[CDE]$ intersectam-se em $P \neq D$. Mostra que $\overline{OP} = \overline{OI}$.*

Problema 14. *Seja $[ABC]$ um triângulo, ω_X a circunferência de Apolónio de relativa a X para $X \in \{A, B, C\}$ e O_X o centro de ω_X.*

(1) Mostra que ω_A, ω_B e ω_C têm um eixo radical comum.
(2) Calcula, em função dos lados do triângulo, $\frac{\overline{O_AO_B}}{\overline{O_AO_C}}$.

(3) *Mostra que o circuncentro de $[ABC]$ pertence ao eixo radical comum às três circunfrências.*

Nota: A prova 'habitual' destes factos não utiliza potência de ponto (excepto talvez de (3)), mas, apesar de ser simples, parece ser um bom exemplo.

Problema 15. *Seja $[ABCD]$ um quadrilátero, P a interseção das suas diagonais e O_1, O_2 os circuncentros de $[APD]$ e $[CPB]$, respectivamente. Sejam M, N e O os pontos médios de $[AC], [BD]$ e $[O_1O_2]$, respectivamente. Mostra que O é o circuncentro de $[MPN]$.*

Problema 16 (1 USAMO 2013)**.** *Num triâgulo $[ABC]$, temos pontos P, Q, R nos lados BC, CA, AB, respectivamente. Seja ω_A o circuncírculo de $[AQR]$ e ω_B, ω_C definidos analogamente. Sejam X, Y, Z as interseções de AP com $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, respectivamente. Prova que $\frac{\overline{YX}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$.*

Problema 17 (7 TST USA 2008)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com baricentro G. Seja P um ponto variável no segmento $[BC]$; constroem-se pontos Q, R em AC, AB, respectivamente, tais que $PQ||AB$ e $PR||AC$. Mostra que o circuncírculo de $[AQR]$ passa por um ponto fixo X tal que $\angle BAG = \angle CAX$.*

Problema 18 (6 Zhautykov 2011)**.** *As diagonais de um quadrilátero cíclico $[ABCD]$ intersectam-se num ponto K. Sejam M e N os pontos médios das diagonais AC, BD, respectivamente. Os circuncírculos de $[ADM]$ e $[BCM]$ intersectam-se em M e L. Mostra que $[KLMN]$ é cíclico.*