Brute force em Geometria

12 de Janeiro de 2015

Resumo

O objectivo deste artigo é explicar como "destruir" alguns problemas de geometria de forma essencialmente computacional.

Índice

Introdução

O objectivo deste artigo é ensinar a destruir problemas de geometria, literalmente, à bruta. Vamos mostrar como abordar problemas de geometria essencialmente à custa de manipulação algébrica.

Mas não se engane o leitor: resolver problemas de geometria à bruta não significa resolver problemas de geometria sem pensar. Continuam, por vezes, a ser necessárias ideias relativamente engenhosas para calcular as distâncias, ângulos, etc., envolvidos no problema. Com o artigo que se segue, procuraremos dar algumas ferramentas úteis e proporcionar alguma intuição para tais ideias.

Pressupomos que os leitores já viram algumas destas ideias no passado e vamos apenas mostrar como aplicá-las em problemas. Ou seja, não vamos explicar o básico: não vamos explicar o que é um referencial cartesiano; não vamos explicar o que são números complexos, nem o que são o seno, o cosseno e a tangente. Vamos apenas mostrar como se aplicam estas ideias/conceitos em problemas.

Boa leitura!

Os autores

1 Geometria Analítica

Decerto muitos dos leitores já ouviram falar em Geometria Analítica, a famosa "geometria das coordenadas". Alguns problemas podem ser resolvidos "pondo a figura num referencial". Apesar disso, o potencial desta técnica não é assim tão grande: o universo de problemas que saem bem com Geometria Analítica é relativamente reduzido. Os problemas que saem bem com esta abordagem caracterizam-se por ter um número reduzido (preferencialmente igual a 0) de circunferências, ter quase "só" rectas e alguns ângulos rectos. Mesmo assim, é um truque que convém ter na manga.

1.1 Pontos, rectas e distâncias

Vamos trabalhar com equações de rectas, pelo que nos convém recordar algumas propriedades básicas destas. Por exemplo, vamos fazer uso do

Facto 1.1. *Duas rectas de equações $y = ax + b$ e $y = cx + d$ são perpendiculares se e só se $ac = -1$.*

Não vamos provar aqui este facto; se o leitor ainda não o conhecia, a prova fica para já como exercício, e veremos mais tarde como o obter como consequência de resultados standard sobre o produto escalar.

Facto 1.2. *Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $D = (d_1, d_2)$. Então $[ABCD]$ é um paralelogramo se e só se $(a_1 + c_1, a_2 + c_2) = (b_1 + b_2, d_1 + d_2)$.*

Demonstração. $[ABCD]$ é um paralelogramo se e só se os pontos médios de $[AC]$ e $[BD]$ coincidem, ou seja, se e só se $\left(\frac{a_1+c_1}{2}, \frac{a_2+c_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1+d_1}{2}, \frac{b_2+d_2}{2}\right)$, o que equivale ao pretendido. □

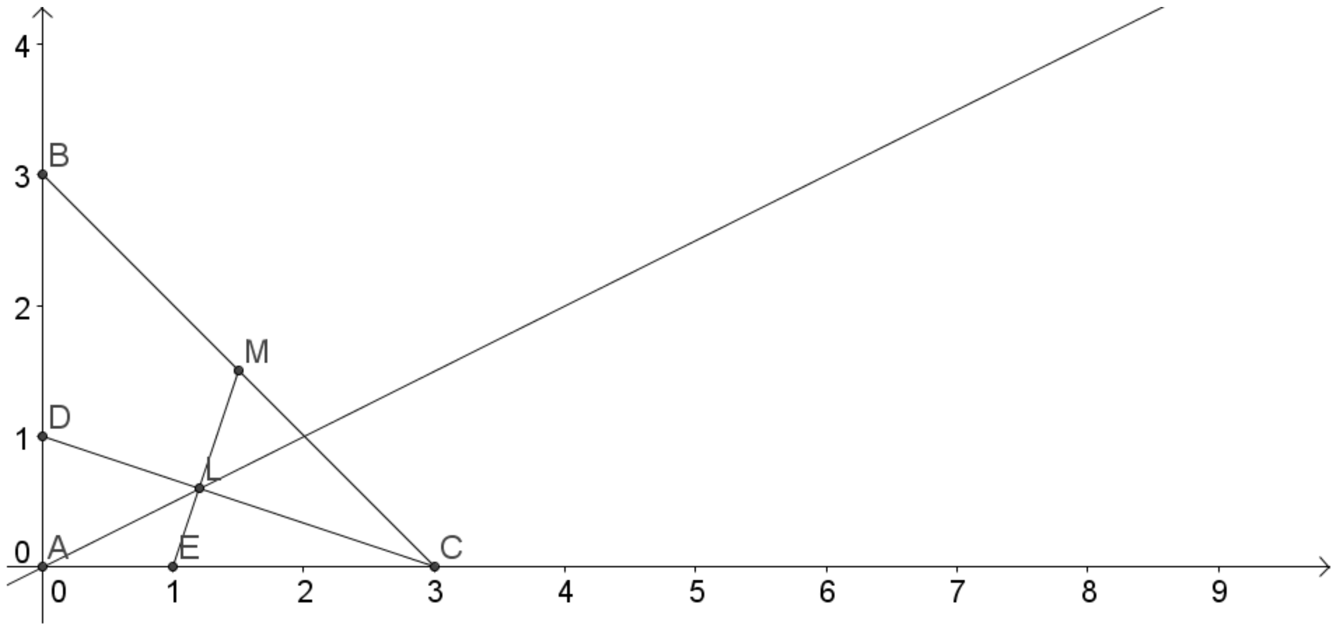
Facto 1.3. *A distância entre dois pontos (a, b) e (c, d) é $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.*

Demonstração. É uma consequência trivial do Teorema de Pitágoras. □

Vamos já passar a um exemplo.

Problema 1. *Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo em A com $\overline{AB} = \overline{AC}$. Seja M o ponto médio de $[BC]$, e sejam D e E pontos em $[AB]$ e $[AC]$, respectivamente, tais que $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ e $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AC}$. As rectas ME e CD intersectam-se em L. Mostra que a recta AL é a bissectriz do ângulo $\angle DLE$.*

Aquilo que queremos provar, que AL é a bissectriz do ângulo $\angle DLE$, não parece fácil de trabalhar com coordenadas. Mas não custa fazer algumas observações sintéticas que tornarão tudo mais fácil. Olhando para a figura, é natural conjecturar que as rectas CD e ME são perpendiculares; se assim for, apenas temos de provar que $D\widehat{L}A = \frac{\pi}{4}$. Note-se que a perpendicularidade implica também que o quadrilátero $[ADLE]$ seja cíclico, e, como $\overline{AD} = \overline{AE}$, isto implica $D\widehat{L}A = A\widehat{L}E$, que é precisamente aquilo que queremos! Vamos assim provar esta conjectura.



Onde vamos colocar os eixos? A resposta a esta questão é quase óbvia: as rectas AB e AC são claramente ideais.

Observe-se que podemos aplicar uma "escala" à figura de tal maneira que $\overline{AB} = \overline{AC} = 3$. Deste modo $B = (0, 3)$ e $C = (3, 0)$; e $D = (0, 1)$, $E = (1, 0)$. O ponto médio M de $[BC]$ tem coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Qual é a equação da recta ME? Esta recta tem equação da forma $y = ax + b$ e passa pelos pontos $(1, 0)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Logo, $a + b = 0$ e $\frac{3}{2}a + b = \frac{3}{2}$. Resolvendo este sistema, obtemos $a = 3$ e $b = -3$, logo a recta tem equação $y = 3x - 3$.

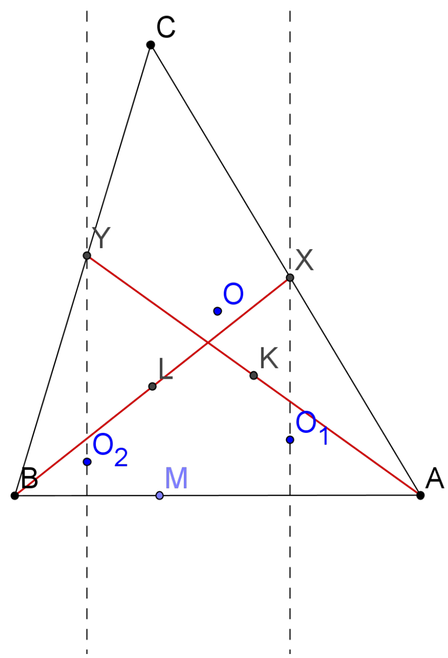
E a recta CD? Esta tem equação $y = cx + d$ e passa pelos pontos $(3, 0)$ e $(0, 1)$. Logo, $3c + d = 0$ e $d = 1$, de onde tiramos $c = \frac{-1}{3}$ e a recta tem equação $y = \frac{-1}{3}x + 1$.

Logo, como $3 \times \frac{-1}{3} = -1$, as rectas ME e CD são perpendiculares, e, pelo que já vimos, isto conclui o problema!

Por vezes podemos focar a nossa atenção apenas numa coordenada, isto é, só na abcissa ou só na ordenada dos pontos. Vejamos o próximo exemplo.

Problema 2 (Sérvia 2011)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com circuncentro O e sejam M, X, Y pontos nos lados $[AB]$, $[AC]$ e $[BC]$ tais que $\overline{AX} = \overline{MX}$ e $\overline{BY} = \overline{MY}$. Sejam K e L os pontos médios dos segmentos $[AY]$ e $[BX]$, respectivamente. As reflexões de O por K e L são O_1 e O_2, respectivamente. Mostra que os pontos X, Y, O_1 e O_2 estão sobre uma circunferência.*

Solução. Poderá parecer à partida estranho que este problema tenha uma solução "decente" com geometria analítica; e de facto precisaremos de incluir diversas observaçoes sintéticas. Mas vamos



usar geometria analítica para provar o nosso lema essencial: O_1 e O_2 estão nas mediatrizes de $[AM]$ e $[BM]$, respectivamente.

Podemos montar um referencial algures, por exemplo, considerando a recta AB e a mediatriz de $[AB]$ como eixos. Podemos até supor que $A = (1, 0)$ e $B = (-1, 0)$; sendo $C = (x_C, y_C)$ e $M = (m, 0)$, podemos calcular as coordenadas de O (é só intersectar a mediatriz de $[AC]$ com o eixo das ordenadas). Calcular X e Y também parece possível: é só intersectar as mediatrizes de $[AM]$ e $[BM]$ com $[AC]$ e $[BC]$, respectivamente. E depois podemos calcular O_1 e O_2 usando o Facto **??** (note-se que $[AO_1YO]$ e $[XO_2BO]$ são paralelogramos), e provar o nosso lema... mas tudo isto parece demasiado aborrecido.

Vamos então preocupar-nos apenas com as abcissas dos pontos e ignorar as suas ordenadas. Para cada ponto P seja x_P a sua abcissa neste referencial. Note-se que o facto de O_1 pertencer à mediatriz de $[AM]$ é equivalente a $x_{O_1} = \frac{x_M + x_A}{2} = \frac{x_M+1}{2}$. Como Y pertence à mediatriz de $[BM]$, temos $x_Y = \frac{x_M + x_B}{2} = \frac{x_M - 1}{2}$. Além disso, $x_O = 0$. Pelo Facto **??**, temos $x_{O_1} + x_O = x_A + x_Y$; ou seja,

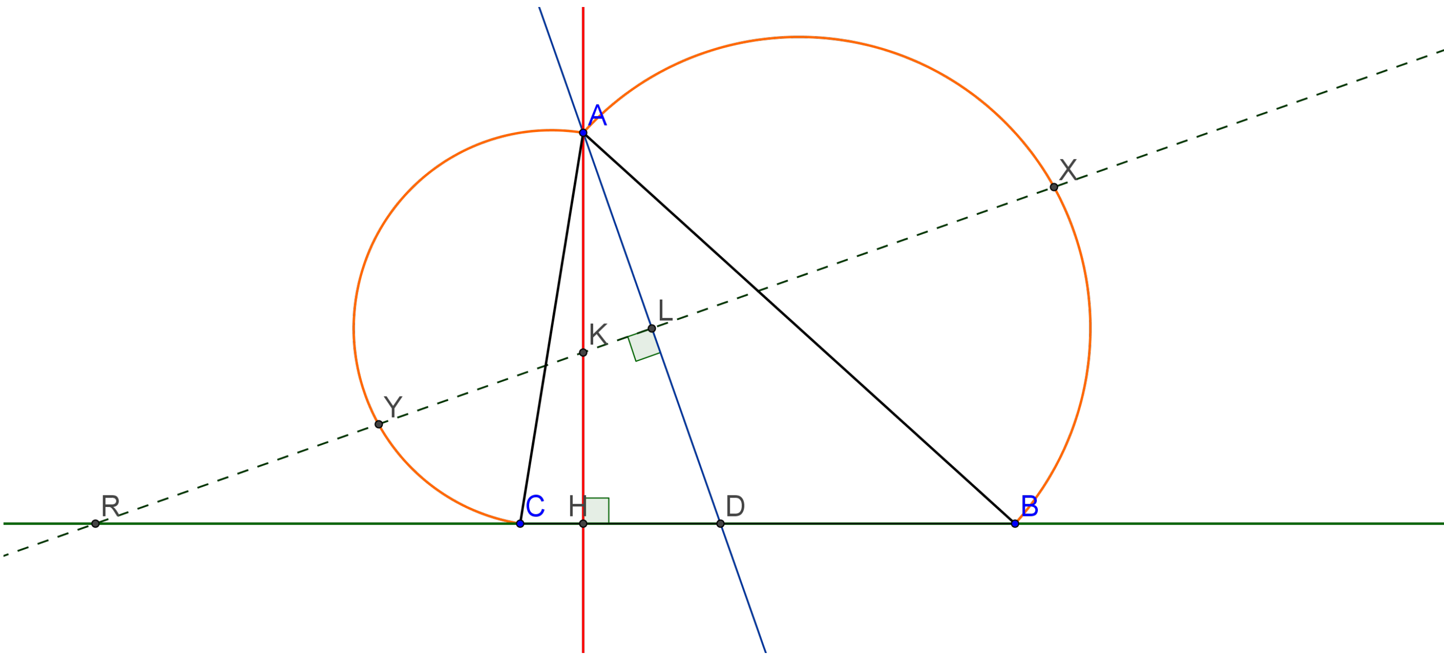
$$x_{O_1} = x_A + x_Y = 1 + \frac{x_M - 1}{2} = \frac{x_M + 1}{2}$$

e o nosso lema está provado.

O resto da solução é geometria sintética: seja l a mediatriz de $[AM]$. Então $\angle(AO, l) = \frac{\pi}{2} - \angle(AB, AO)$; como $B\widehat{O}A = 2B\widehat{C}A$, por Arco Capaz, e $\overline{OA} = \overline{OB}$, temos $O\widehat{A}B = \frac{\pi}{2} - B\widehat{C}A$. Logo, $\angle(AO, l) = \angle(AC, BC)$; como YO_1 é paralela a AO, temos $X\widehat{O_1}Y = B\widehat{C}A$. Ora, $X\widehat{M}Y = \pi - Y\widehat{M}B - A\widehat{M}X = \pi - M\widehat{B}Y - X\widehat{A}M = B\widehat{C}A$, logo $X\widehat{O_1}M = X\widehat{M}Y$ e os pontos X, Y, M e O_1 são concíclicos. Analogamente, os pontos X, Y, M e O_2 são concíclicos, e portanto X, Y, O_1 e O_2 são concíclicos, como pretendido. $\square$

O seguinte exemplo é bastante interessante, pois utiliza Geometria Analítica de forma razoavelmente inesperada, ainda que sem fugir muito à rotina.

Problema 3 (TST Irão 2013)**.** *No triângulo $[ABC]$, as rectas AD e AH são a bissectriz interna e a altura relativas ao vértice A, com D e H na recta BC. A mediatriz de $[AD]$ intersecta as semicircunferências de diâmetros $[AB]$ e $[AC]$, construídas no exterior do triângulo, em X e Y, respectivamente. Prova que o quadrilátero $[XYDH]$ é cíclico.*



Solução. Não é nada óbvio como resolver isto com Analítica em tempo útil. Para começar, onde colocar os eixos? Uma ideia tentadora é AH e BC, mas calcular D é assustador, e se pensarmos que depois teremos de calcular X e Y, mais assustados ainda ficamos. Além disso, exprimir a condição de $[XYDH]$ ser cíclico não é nada agradável.

Mas desta última condição tratamos já: seja $R = XY \cap BC$. Então, pelo Teorema das Cordas, a ciclicidade de $[XYDH]$ equivale a $\overline{RY} \cdot \overline{RX} = \overline{RH} \cdot \overline{RD}$. Estas distâncias são calculáveis, e são mais ou menos agradáveis de trabalhar dependendo dos nossos eixos.

Os eixos que vamos escolher serão as rectas XY e AD. Porquê? Vamos ver que tudo pode ser posto a funcionar com esses eixos. Seja $A = (a, 0)$. Sejam $X = (0, m)$ e $Y = (0, n)$. Calma, mas X e Y não dependem de B e C? Sim, dependem, mas nós vamos agir "ao contrário": definimos primeiro X e Y, e depois construímos B e C em função deles. Assim evitamos trabalhar com equações de circunferências.

O ponto R também será um dos nossos parâmetros iniciais, $R = (0, r)$. O ponto D é simplesmente a reflexão de A por L, onde L é a origem do referencial; ou seja, $D = (-a, 0)$. O ponto B é a intersecção de RD com a perpendicular a AX por X. Para o ponto C temos algo análogo.

É claro que isto não nos garante que AD é a bissectriz de $\angle CAB$. Mas nós podemos exprimir essa condição algebricamente (como uma equação que a, r, m, n têm de verificar) e exprimir algebricamente também a condição da ciclicidade que queremos provar, e depois provar que ambas são equivalentes. Vamos fazê-lo.

Para começar, seja $K = AH \cap XY$. Então o quadrilátero $[DHKL]$ é cíclico, pois $K\widehat{L}D = D\widehat{H}K = \frac{\pi}{2}$. Logo,

$$\overline{RK} \cdot \overline{RL} = \overline{RH} \cdot \overline{RD}$$

pelo Teorema das Cordas. Assim, $[XYDH]$ ser cíclico equivale a $\overline{RX} \cdot \overline{RY} = \overline{RK} \cdot \overline{RL}$. Note-se que os triângulos $[ALK]$ e $[BLD]$ são semelhantes (porquê?), logo,

$$\frac{\overline{KL}}{a} = \frac{a}{r}$$

e portanto temos $K = (0, \frac{a^2}{r})$.

Portanto, temos as equivalências

$$\begin{aligned} \overline{RK} \cdot \overline{RL} = \overline{RH} \cdot \overline{RD} &\Leftrightarrow (r-m)(r-n) = (r - \frac{a^2}{r}) \cdot r \\ &\Leftrightarrow (r-m)(r-n) = r^2 - a^2 \\ &\Leftrightarrow r(m+n) = a^2 + mn. \end{aligned}$$

Já temos uma condição algébrica equivalente à ciclicidade de $[XYDH]$. Falta-nos exprimir o facto de AD ser a bissectriz de $\angle CAB$. Uma possível maneira de o fazer é usar o facto de tal ser equivalente a os declives das rectas AC e AB serem simétricos, pois a recta AD é o eixo das abcissas. Mas há uma outra forma, ligeiramente mais elegante, que vamos mostrar aqui por ser um pouco mais criativa. Esta ideia pode parecer mais motivada a quem já tiver visto Circunferências de Apolónio. Vamos provar o seguinte

Lema 1.4. *A recta AD é a bissectriz de $C\widehat{A}B$ se e só se $\overline{RA}^2 = \overline{RB} \cdot \overline{RC}$, ou seja, se e só se $\overline{RD}^2 = \overline{RB} \cdot \overline{RC}$.*

A prova é angle-chasing fácil: esta relação de comprimentos equivale, pelo Teorema das Cordas, a que a recta RA seja tangente à circunferência circunscrita a $[ABC]$. Ou seja, equivale a $R\widehat{A}C = A\widehat{B}C$. Mas temos $R\widehat{A}C = R\widehat{A}D - C\widehat{A}D = A\widehat{D}R - C\widehat{A}D$, e $A\widehat{B}C = A\widehat{D}R - D\widehat{A}B$. Logo, $R\widehat{A}C = A\widehat{B}C$ se e só se $A\widehat{D}R - C\widehat{A}D = A\widehat{D}R - D\widehat{A}B$, ou seja, se e só se AD bissecta $\angle CAB$.

Antes de calcularmos as coordenadas de B e C, vamos fazer uma observação que simplifica um pouco as contas. Sejam y_B e y_C as ordenadas de B e C, respectivamente. Sendo P e Q as projecções ortogonais de B e C sobre XY, respectivamente, temos $\overline{RP} = \overline{RB}\cos(D\widehat{R}X)$, $\overline{RQ} = \overline{RC}\cos(D\widehat{R}X)$, $\overline{RL} = \overline{RD}\cos(D\widehat{R}X)$. Assim, a condição $\overline{RD}^2 = \overline{RB} \cdot \overline{RC}$ equivale a $\overline{RL}^2 = \overline{RP} \cdot \overline{RQ}$, ou seja, a $r^2 = (r - y_B)(r - y_C)$.

Em particular, só precisamos de calcular as ordenadas de B e C; as abcissas não nos interessam. Vamos calcular a equação da recta AY. Esta passa pelos pontos $(a, 0)$ e $(0, n)$; logo tem equação da forma $y = sx + n$, e $sa + n = 0$, ou seja, $s = -\frac{n}{a}$, e portanto a recta tem equação $y = -\frac{n}{a}x + n$. A recta RD passa pelos pontos $(-a, 0)$ e $(0, r)$, logo de forma semelhante obtemos que a sua equação é $y = \frac{r}{a}x + r$. Agora vamos calcular a equação da recta perpendicular a AY por Y, de modo a podermos determinar C. Como esta recta é perpendicular à recta AY, de declive $-\frac{n}{a}$, o seu declive é $\frac{a}{n}$. Passa ainda pelo ponto $(0, n)$, logo a sua equação é $y = \frac{n}{a}x + n$.

Temos assim, já que $C \in RD$, $y_C = \frac{r}{a}x_C + r$, onde x_C é a abcissa de C, e, além disso, $y_C = \frac{n}{A}x_C + n$. Da primeira equação, obtemos $x_C = \frac{a(y_C - r)}{r}$, e da segunda obtemos $x_C = \frac{n(y-n)}{a}$. Logo,

$$\frac{a(y_C - r)}{r} = \frac{n(y_C - n)}{a}$$

e desenvolvendo isto vem

$$y_C = \frac{r(a^2 - n^2)}{a^2 - rn}.$$

Analogamente,

$$y_B = \frac{r(a^2 - m^2)}{a^2 - rm}.$$

A nossa condição da bissectriz fica, portanto,

$$r^2 = \left(r - \frac{r(a^2 - m^2)}{a^2 - rm}\right)\left(r - \frac{r(a^2 - n^2)}{a^2 - rn}\right)$$

$$1 = \left(1 - \frac{a^2 - m^2}{a^2 - rm}\right)\left(1 - \frac{a^2 - n^2}{a^2 - rn}\right)$$

$$1 = \left(\frac{m^2 - rm}{a^2 - rm}\right)\left(\frac{n^2 - rn}{a^2 - rn}\right)$$

e isto equivale a

$$(a^2 - rm)(a^2 - rn) = (m^2 - rm)(n^2 - rn)$$

$$m^2n^2 - rmn(m + n) - r^2mn = a^4 - ra^2(m + n) + r^2mn$$

$$r(a^2 - mn)(m + n) = a^4 - m^2n^2$$

Ora, $a^2 - mn \neq 0$, pois, já que L está entre X e Y, se tem $mn < 0$ e $a^2 - mn > 0$. Como $a^4 - m^2n^2 = (a^2 + mn)(a^2 - mn)$, isto equivale a

$$r(m + n) = a^2 + mn$$

que foi precisamente o que obtivemos antes, logo acabámos o problema! □

1.2 Produto escalar

Podemos usar produtos escalares como forma de calcular ângulos entre rectas no plano coordenado. Habitualmente isto não é recomendável, mas o desespero em problemas de geometria pode levar a coisas terríveis!

Vamos recordar a definição de produto escalar.

Definição 1.5 (Produto escalar)**.** *Dados dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o seu produto escalar, denotado por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, é igual a $||\vec{u}||\times||\vec{v}||\cos\theta$, onde θ é o ângulo formado pelos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Aqui $||\vec{u}||$ é a *norma* do vector $\vec{u}$: sendo $\vec{u}=(a,b)$, $||\vec{u}||=\sqrt{a^2+b^2}$. Temos a seguinte propriedade conhecida do produto escalar:

Proposição 1.6. *Sejam $\vec{u}=(a,b)$ e $\vec{v}=(c,d)$ dois vectores. Então $\vec{u}\cdot\vec{v}=ac+bd$.*

Então temos

$$\cos\theta=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}$$

e podemos, em caso de necessidade, utilizar esta relação para calcular ângulos.

Vamos ver um exemplo. Voltemos ao problema **??**: suponhamos que a nossa geometria sintética está num dia muito mau, e, depois de provarmos que CD e ME são perpendiculares, falhamos em reconhecer o quadrilátero cíclico $[ADLE]$. Queremos provar que $D\widehat{L}A=\frac{\pi}{4}$; e podemos fazê-lo usando o produto escalar.

Vamos calcular as coordenadas de L; sejam estas (x_L,y_L). Já vimos que ME e CD têm equações $y=3x-3$ e $y=\frac{-1}{3}x+1$. Então

$$3x_L-3=\frac{-1}{3}x_L+1$$

de onde obtemos $x_L=\frac{6}{5}$. Então $y_L=3\times\frac{6}{5}-3=\frac{3}{5}$, ou seja, $L=\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$.

Sejam $\vec{u}=\overrightarrow{LD}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{A}$. Então $\vec{u}=D-L=(0,1)-\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{6}{5},\frac{2}{5}\right)$ e $\vec{v}=A-L=\left(-\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$. Queremos calcular o ângulo θ entre estes dois vectores. Temos

$$||\vec{u}||=\sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$||\vec{v}||=\sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Então $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{2\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{5}\cos\theta=6\sqrt{2}\cos\theta$. Por outro lado,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{2}{5}\left(-\frac{3}{5}\right)=6$$

e portanto $6=6\sqrt{2}\cos\theta$, pelo que $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$, e portanto $\theta=\frac{\pi}{4}$, como pretendido.

1.3 Problemas propostos

Agora vamos deixar alguns problemas que podem ser abordados com geometria analítica.

Problema 4. *Seja $[ABC]$ um triângulo e seja H o ponto na recta $[BC]$ tal que AH é perpendicular a BC. Sejam E e F pontos nos lados $[AC]$ e $[AB]$, respectivamente, e sejam P e Q as projecções ortogonais de E e F, respectivamente, sobre BC. Prova que as rectas AH, BE e CF são concorrentes se e só se as rectas AH, EQ e FP são concorrentes.*

Problema 5 (Final das OPM 2006). *No triângulo equilátero $[ABC]$, D é o ponto médio de $[AC]$, E é a projecção ortogonal de D sobre $[CB]$ e F é o ponto médio de $[DE]$. Prova que as rectas FB e AE são perpendiculares.*

Problema 6 (IMO Shortlist 1991). *Sejam $[ABC]$ um triângulo acutângulo, M o ponto médio de $[BC]$, P o ponto no segmento $[AM]$ tal que $\overline{PM} = \overline{BM}$ e H o pé da perpendicular de P sobre BC. Q é o ponto de intersecção do segmento $[AB]$ e da recta que passa por H e é perpendicular a PB, e R é o ponto de intersecção do segmento $[AC]$ e da recta que passa por H e é perpendicular a PC.*

Mostra que a recta BC é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo $[QHR]$.

Problema 7 (Final das OPM 2009). *Nos lados $[CD]$ e $[BC]$ do quadrado $[ABCD]$ estão marcados pontos M e N, respectivamente. O perímetro do triângulo $[MCN]$ é igual ao dobro do comprimento do lado do quadrado. Determina $M\widehat{A}N$.*

Problema 8 (Ibero 2004). *Seja Γ uma circunferência e seja A um ponto fora de Γ. Determina o lugar geométrico do circuncentro do triângulos $[AMN]$, onde $[MN]$ é um diâmetro variável de Γ.*

Problema 9 (TST Alemanha 2008). *Seja $[ABCD]$ um trapézio isóseceles. Determina o lugar geométrico dos pontos P tais que $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$.*

Problema 10 (Ibero 2008). *Seja $[ABC]$ um triângulo e seja r a bissectriz externa do ângulo $\angle ABC$. Sejam P e Q as projecções ortogonais de A e C, respectivamente, sobre r. Sejam $M = CP \cap BA$ e $N = AQ \cap BC$. Mostra que as rectas MN, r e AC são concorrentes.*

Problema 11 (USAMO 2008). *Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo escaleno, e sejam M, N e P os pontos médios de $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respectivamente. Sejam D e E pontos na mediana $[AM]$ tais que $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $\overline{AE} = \overline{CE}$. As rectas BD e CE intersectam-se em F.*

Prova que o quadrilátero $[APFN]$ é cíclico.

2 Números Complexos

A técnica que aqui apresentamos é uma das mais poderosas e versáteis, sendo possivelmente também uma das mais "estranhas" para quem não é familiar com a mesma. Nesta secção será necessário estar à vontade a trabalhar com números complexos (em particular com a sua representação geométrica, módulos, conjugados, etc.). Os problemas em que números complexos são, à partida, mais adequados, são problemas centrados à volta de uma única circunferência, que pode ser o circuncírculo ou incírculo de um triângulo, por exemplo; no entanto, por vezes problemas que parecem pouco adequados para este método são resolúveis usando alguma observação inteligente.

Aquilo que fazemos em complexos é associar cada ponto $Z = (a, b)$ do plano a um complexo $z = a+bi$ (em geral, denotamos por maiúsculas pontos no plano e os seus complexos correspondentes por minúsculas). A estrutura aditiva dos complexos corresponde então à estrutura aditiva de vectores. Mas é a estrutura multiplicativa dos complexos e a sua interpretação geométrica que os distinguem, pois permitem-nos trabalhar com ângulos de forma relativamente agradável (e, em particular, com colinearidades e perpendicularidades). Vamos então passar à introdução da artilharia.

2.1 A Artilharia

Vamos agora apresentar as fórmulas que vão ser a base de qualquer utilização de complexos em geometria. Não vamos apresentar provas completas de todas elas, mas provaremos algumas e explicaremos a origem daquelas que pareçam mais obscuras. O leitor é convidado a preencher os detalhes.

Um número complexo pode ser escrito na forma $z = e^{i\alpha}r$ em que α é o ângulo (orientado, no sentido directo) que o vector $\overrightarrow{OZ}$ faz com a o eixo real e $r = |z|$ é a distância $\overline{OZ}$, onde O é a origem. Isto permite-nos deduzir facilmente o seguinte facto útil:

Facto 2.1. *Sejam A, B dois pontos, a, b os seus complexos correspondentes e α o ângulo (orientado no sentido directo) que a recta AB faz com o eixo real. Então*

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = e^{2i\alpha}$$

Demonstração. Pelo que vimos, que $a - b = |a - b|e^{i\alpha}$. Elevando ao quadrado, podemos usar que $|z|^2 = z\overline{z}$:

$$e^{2i\alpha} = \frac{(a-b)^2}{|a-b|^2} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)(\overline{a}-\overline{b})} = \frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}. \qquad \square$$

A partir daqui, temos o seguinte.

Teorema 2.2. • *Duas rectas AB e CD são paralelas se e só se $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}$.*

- *Os pontos A, B, C são colineares se e só se $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}$, ou, equivalentemente, se*

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- *Duas rectas AB e CD são perpendiculares se e só se $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}$.*

- *Sendo $\alpha = \angle ACB$ (medido de A para B no sentido directo) tem-se $\frac{c-b}{|c-b|} : \frac{c-a}{|c-a|} = e^{i\alpha}$, ou ainda $\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}} : \frac{c-a}{\overline{c}-\overline{a}} = e^{2i\alpha}$.*

Todos estes factos não são mais que consequências directas de **??**. O próximo teorema dá-nos algumas fórmulas que envolvem pontos na circunferência unitária. Para um ponto na circunferência unitária, $1 = |a|^2 = a\overline{a}$; tendo o conjugado, podemos aplicar as fórmulas acima de forma mais simples.

Teorema 2.3.

- *Para pontos A, B na circunferência unitária, $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -ab$.*

- *Dados A, B na circunferência unitária, A, B, C são colineares se e só se $\overline{c} = \frac{a+b-c}{ab}$.*

- *O pé da perpendicular de um ponto C qualquer na corda da cirunferência unitária AB é dado por $\frac{1}{2}(a+b+c-ab\overline{c})$.*

- *Dados A, B, C, D na circunferência unitária, a intersecção de AB com CD é $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.*

- *A intersecção das tangentes à circunferência unitária por A e B é dada por $\frac{2ab}{a+b}$.*

O primeiro ponto é simplesmente o que obtemos do teorema **??** substituindo $\overline{a} = \frac{1}{a}$ e $\overline{b} = \frac{1}{b}$. O mesmo para o segundo ponto. O terceiro ponto é o primeiro que ilustra uma importante ideia ao fazer complexos. A projeção p de c em ab obedece a $pc \perp ab$ e p, a, b são colineares; isto vai dar-nos duas equações a relacionar p com $\overline{p}$, e resolvendo-as como se fosse um sistema nessas duas variáveis tiramos uma fórmula para p. Como p, a, b são colineares, $\overline{p} = \frac{a+b-p}{ab}$. Por outro lado, $\frac{p-c}{\overline{p}-\overline{c}} = -\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = ab$. Substituindo a expressão para $\overline{p}$, temos

$$ab = \frac{p-c}{\frac{a+b-p}{ab} - \overline{c}} \Leftrightarrow a+b-p-ab\overline{p} = p-c \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}(a+b+c-ab\overline{c}).$$

Observe-se que ao aproximar um ponto C de um ponto A, a recta AC degenera para a tangente à circunferência unitária. Assim, podemos deduzir a última fórmula da penúltima igualando algumas variáveis! O próximo teorema dá fórmulas bastante simples para o baricentro e ortocentro do triângulo.

Teorema 2.4.

- *O baricentro G de um triângulo $[ABC]$ é dado por $g = \frac{a+b+c}{3}$.*

- *Dado um triângulo $[ABC]$ com circuncentro O e ortocentro H, tem-se $h + 2o = a + b + c$.*

O primeiro é mais do que conhecido na forma vectorial. Quanto ao segundo, é uma consequência directa da recta de Euler, pois $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ dá-nos $h - o = a + b + c - 3o$, o que é o que queremos. Também a poderíamos deduzir directamente supondo sem perda de generalidade que a a, b, c estão na circunferência unitária (porque é que o podemos fazer?) e usando as fórmulas de **??**.

Vamos agora a um critério para quadriláteros cíclicos e, após isso, uma fórmula para a área de um triângulo.

Teorema 2.5. *Existe uma circunferência que passa por A, B, C, D se e só se*

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{a-c} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.6. *Um triângulo $[ABC]$ tem área orientada igual a*

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

O Teorema **??** é apenas arco-capaz e a fórmula para o ângulo e pode ser escrito também com conjugados (pois, recorde-se, $z \in \mathbb{R}$ se e só se $z = \overline{z}$). A fórmula para a área é deduzida a partir da fórmula análoga em analítica.

O próximo teorema dá-nos uma forma de abordar problemas que envolvam pontos médios dos arcos, bissectrizes e incentros. Este é um assunto um pouco delicado por um simples motivo. O ponto médio do arco AB é uma das intersecções da mediatriz de $[AB]$ com a circunferência, e é fácil ver que este obedece a $m^2 = ab$; no entanto, existe dois pontos que obedecem a isso e não podemos simplesmente tirar a raiz quadrada (em geral tirar raízes quadradas em complexos não é boa ideia pois não há forma de distinguir as duas raízes), mas vamos ver como dar a volta a isso.

Teorema 2.7. *Sejam A, B, C pontos na circunferência unitária. Então existem complexos u, v, w tais que $a = u^2, b = v^2, c = w^2$ e se tem o seguinte:*

- *Os pontos médios dos arcos BC, CA, AB que não contêm os vértices opostos são $-vw, -uw, -uv$, respectivamente.*
- *Os pontos médios dos arcos BC, CA, AB que contêm os vértices opostos são vw, uw, uv, respectivamente.*
- *O incentro de $[ABC]$ é dado por $-(uv + vw + wu)$.*

Por fim, vamos a algumas fórmulas finais pouco relacionadas.

Teorema 2.8.
- *A mediatriz de $[AB]$ tem equação $x(\overline{a} - \overline{b}) - \overline{x}(a - b) = a\overline{a} - b\overline{b}$.*

- *Dado um triângulo $[ABC]$ arbitrário, o seu circuncentro é dado por*

$$\begin{vmatrix} a & a\overline{a} & 1 \\ b & b\overline{b} & 1 \\ c & c\overline{c} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

- *O centro da roto-homotetia que envia $[AB]$ em $[CD]$ é dado por $\frac{ad-bc}{a+d-b-c}$.*

- *Dados pontos A, B, C, A', B', C' na circunferência unitária, as rectas AA', BB' e CC' concorrem se e só se*

$$(a-b')(b-c')(c-a') = (a-c')(b-a')(c-b').$$

- *O inverso de z relativamente à circunferência unitária é $\frac{1}{\overline{z}}$.*

Antes de nos dedicarmos à destruição de problemas, uma pequena nota sobre como "interiorizar" estas fórmulas. Não é de todo aconselhável tentar fixar todas as fórmulas de uma vez. Antes de tudo, é preciso compreender bem **??** e perceber como isso implica **??**. É também uma boa ideia que o leitor tente deduzir as fórmulas, pois torna-se mais fácil fixa-las e, se em prova precisar de as deduzir novamente, vai conseguir fazê-lo rapidamente. Um método que aparenta ser bom é resolver alguns problemas com estas páginas ao lado, e aquilo que precisa de saber vai "entrando".

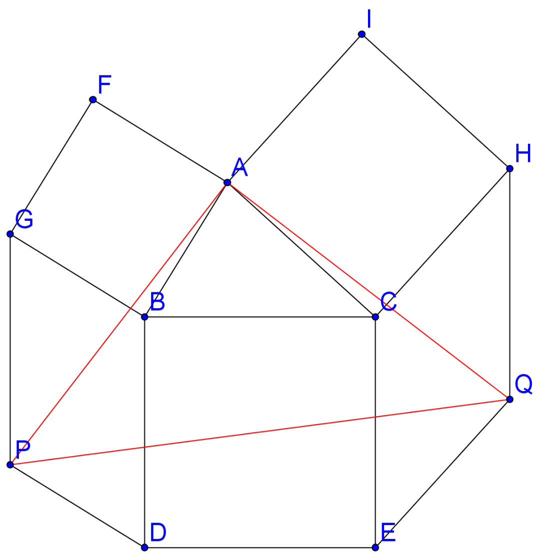
A maior parte destes resultados (tirando talvez os últimos) podem ser considerados conhecidos. No entanto, numa competição é sempre boa ideia enunciar todas as fórmulas que estiver a utilizar e, de preferência, caso o tempo o permita, dar pelo menos uma ideia da demonstração.

2.2 Os Problemas

Vamos agora finalmente ver como podemos resolver problemas com complexos, aplicando as fórmulas acima. O primeiro problema mostra como podemos usar o facto de rotações serem simples com complexos. A multiplicação de um complexo por $e^{i\alpha}$ corresponde geometricamente à rotação desse complexos pela origem com um ângulo α no sentido directo.

Problema 12 (TST Jugoslávia 1992)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo e consideremos pontos tais que $[AIHC]$, $[AFGB]$ e $[BDEC]$ são quadrados. Sejam P e Q pontos tais que $[BGPD]$ e $[CHQE]$ são paralelogramos. Mostra que o triângulo $[PAQ]$ é isósceles e rectângulo.*

Solução. Este problema é ideal para complexos. As rotações são todas fáceis de trabalhar, bem como o paralelogramo. E a própria condição que queremos provar pode ser vista como uma rotação! Vamos supôr que os vértices A, B, C estão dispostos no sentido directo. Então uma rotação em torno de B com ângulo $\frac{\pi}{2}$ no sentido directo envia A em G. Como $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, isso significa que $b-g = i(b-a)$, ou seja, $g = b(1-i) + ia$. Uma rotação com ângulo de $\frac{\pi}{2}$ em sentido inverso em torno de C envia A em H, e como $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ temos $c - h = -i(c-a)$, isto é, $h = c(1+i) - ia$. Analogamente



$e = c(1-i)+ib$ e $d = b(1+i)-ic$. Como $[BGPD]$ é um paralelogramo, $p = g+d-b = b+ia-ic$ e $q = c+ib-ia$. Resta agora provar que uma rotação em torno de A com ângulo $\frac{\pi}{2}$ envia P em Q. Mas isso é fácil, pois $i(p-a) = i(b+ia-ic-a) = ib-a+c-ia = q-a$, terminando o problema. $\square$

Neste primeiro problema não houve realmente grandes contas. Além disso, também não escolhemos nenhum referencial em específico para fazer as contas. Como vamos ver, muitas vezes vamos escolher um referencial tal que a circunferência unitária seja importante para podermos usar **??**. O próximo problema é um exemplo disso mesmo.

Problema 13 (IMO Shortlist 1998)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com ortocentro H, circuncentro O e circunraio R. Sejam D, E, F as reflexões de A, B, C pelas rectas BC, CA, AB, respectivamente. Mostra que D, E, F são colineares se e só se $\overline{OH} = 2R$.*

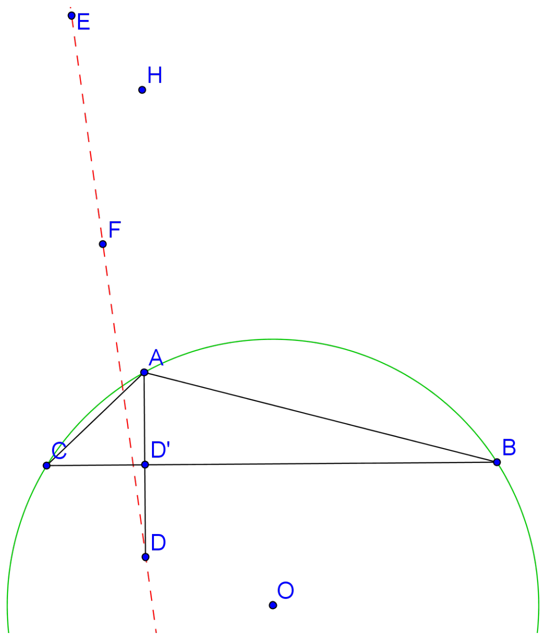
Solução. Sem perda de generalidade suponhamos que a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ é a circunferência unitária (porque é que o podemos fazer?). Então $o = 0, R = 1$ e $h = a+b+c$ por **??**. A condição $\overline{OH} = 2R$ torna-se agora muito fácil de trabalhar, e é equivalente a

$$4 = |h-o|^2 = (a+b+c)\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Expandindo e eliminando os denominadores, isso é o mesmo que

$$abc = a^2c+b^2a+c^2b+c^2a+a^2b+b^2c. \quad (1)$$

Vamos apenas parar um pouco para garantir que não nos enganámos com nada. Primeira coisa que podemos verificar é que a expressão é simétrica, como seria de esperar. Além disso, é



homogénea; e de facto não faria sentido não ser, pois se multiplicarmos tudo por $e^{i\alpha}$ estamos a rodar toda a figura em torno da origem, e portanto é conveniente que $\overline{OH} = 2R$ se continue a verificar.

Vamos agora trabalhar a outra condição, e para isso temos de calcular d, e, f. Como podemos fazê-lo? Sendo D' a projeção de A em BC, sabemos que $d' = \frac{1}{2}\left(b + c + a - \frac{bc}{a}\right)$. Mas é claro que D' é o ponto médio de $[AD]$, logo $d = 2d' - a = b + c - \frac{bc}{a}$; analogamente $e = a + c - \frac{ac}{b}$ e $f = a + b - \frac{ab}{c}$. Apenas temos de verificar que a expressão acima é equivalente a $\frac{d-e}{\overline{d}-\overline{e}} = \frac{d-f}{\overline{d}-\overline{f}}$, por isso mãos à obra. Vamos simplificar $d - e$:

$$\begin{aligned} d - e &= \left(b + c - \frac{bc}{a}\right) - \left(a + c - \frac{ac}{b}\right) = (b - a) - \left(\frac{bc}{a} - \frac{ac}{b}\right) \\ &= (b - a) - \frac{c(b - a)(b + a)}{ba} = \frac{(b - a)(ab - bc - ca)}{ba}. \end{aligned}$$

Aqui devemos notar que a expressão ter factorizado não é por acaso nem é surpreendente. Os pontos D e E "correspondem" a A e B, respectivamente; como tal, quando $a = b$ temos de ter $d = e$, o que força a factorização. Estas factorizações são essenciais para manter as contas não demasiado grandes (e por vezes sem elas tornam-se mesmo insuportáveis). Além disso, permitem que depois certos factores cortem. Voltemos ao problema. Ainda precisamos de simplificar $\overline{d} - \overline{e}$, mas como temos $d - e$ é só conjugar essa expressão, ou seja, substituir todos os a, b, c por $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, respectivamente. Ou seja,

$$\overline{d} - \overline{e} = \frac{(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})(\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} - \frac{1}{ca})}{\frac{1}{ba}} = \frac{-(b - a)(c - a - b)}{abc}.$$

Agora temos praticamente tudo, pois $\frac{d-e}{\overline{d}-\overline{e}} = -\frac{c(ab-bc-ca)}{c-a-b}$ e uma expressão analoga para $\frac{d-f}{\overline{d}-\overline{f}}$. Por fim, D, E, F são colineares se e só se

$$-\frac{c(ab-bc-ca)}{c-a-b} = -\frac{b(ac-bc-ba)}{b-a-c}$$

Expandindo esta última expressão com cuidado e cortando os termos iguais ela é equivalente a

$$a^2c^2 - a^2b^2 + 2ab^2c - 2abc^2 + ac^3 - ab^3 + bc^3 - b^3c = 0. \quad (2)$$

Mas esta não é a (1)! Será que nos enganámos? Será que afinal o problema é falso? A expressão (2) nem sequer tem o mesmo grau, e nem é simétrica. No entanto, ainda nem tudo está perdido; talvez apenas precisemos de factorizar (2) para nos aparecer (1)! Como (2) tem grau 4 e (1) tem grau 3, provavelmente (2) vai ser simplesmente (1) a multiplicar por qualquer coisa de grau 1. Notemos que (2) é quase simétrica em relação a b e c, e de facto ao trocar as duas, a expressão do lado esquerdo troca de sinal; isso dá-nos logo uma pista de que o factor extra será algo como $b-c$ ou $b+c$, e notando que se $b=c$ temos (2), de certeza que apenas temos de factorizar retirar o factor $b-c$! Vamos ao trabalho:

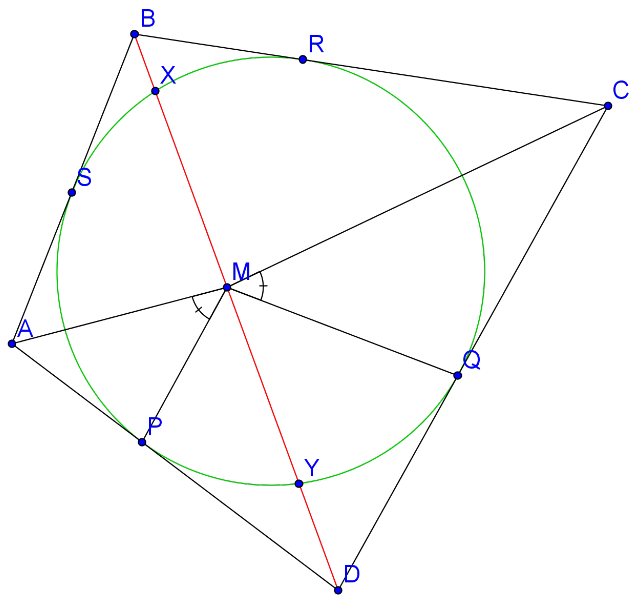
$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow -a^2(b-c)(b+c) + 2abc(b-c) - a(b-c)(b^2+bc+c^2) - bc(b-c)(b+c) = 0 \\
&\Leftrightarrow (b-c)(-a^2b - a^2c + 2abc - ab^2 - abc - ac^2 - b^2c - c^2b) = 0 \\
&\Leftrightarrow (b-c)(a^2c + b^2a + c^2b + c^2a + a^2b + b^2c - abc) = 0.
\end{aligned}$$

Aquilo que fizemos para factorizar a expressão foi juntar termos que usem b e c de forma simétrica (coisa que já tinhamos feito quando expandimos) e aplicar as factorizações $b^2 - c^2 = (b-c)(b+c)$ e $b^3 - c^3 = (b-c)(b^2+bc+c^2)$ para extrair o factor $b-c$. Agora sim, terminámos, pois é obviamente impossível ter $b=c$ (uma vez que $B \neq C$), logo (2) é equivalente a que a expressão dentro dos parênteses seja 0, e isso é precisamente (1). $\square$

Essencialmente o que fizemos neste problema foi calcular os pontos, escrever as condições que queríamos provar ser equivalentes e, após isso, mostrar que de facto são equivalentes. Este último passo não foi imediato e tivemos de factorizar uma das condições; em geral, verificar se uma expressão factoriza (por exemplo em coisas simples como $b-c$ ou $b+c$) é boa ideia e torna as contas menos más, ou possíveis.

Outra forma de fixarmos a circunferência unitária é no incírculo de um triângulo ou quadrilátero. Nesse caso as nossas variáveis não são os vértices mas sim os pontos de tangência, e calculamos os vértices com a última forma de **??**. Vejamos um exemplo disso.

Problema 14 (Ibero 2006)**.** *Seja $[ABCD]$ um quadrilátero que tem uma circunferência inscrita φ. A circunferência φ tangencia AD e CD em P e Q, respectivamente. Seja M o ponto médio da corda $[XY]$ definida por BD em φ. Mostra que $\angle AMP = \angle CMQ$.*



Solução. Sejam R e S os pontos de tangência de CB e BA, respectivamente. Seja φ a circunferência unitária. Vamos escrever tudo em função de p, q, r, s: $a = \frac{2sp}{s+p}, b = \frac{2pq}{p+q}, c = \frac{2qr}{q+r}$ e $d = \frac{2pq}{p+q}$; além disso $\overline{a} = \frac{2}{p+s}$ e relações analogas para os outros. Vejamos primeiro que a condição dos ângulos é trabalhável se soubermos como calcular m. De facto, $e^{i\angle AMP} = \frac{m-a}{\overline{m}-\overline{a}} : \frac{m-p}{\overline{m}-\overline{p}}$ e $e^{i\angle QMC} = \frac{m-q}{\overline{m}-\overline{q}}. : \frac{m-c}{\overline{m}-\overline{c}}$; desse modo, o problema é equivalente à igualdade das duas expressões, ou seja, a

$$\frac{m-a}{\overline{m}-\overline{a}} \cdot \frac{m-c}{\overline{m}-\overline{c}} = \frac{m-p}{\overline{m}-\overline{p}} \cdot \frac{m-q}{\overline{m}-\overline{q}}. \quad (1)$$

Vamos então calcular m; a abordagem natural é calcular x e y e depois encontrar o seu ponto médio. Como x está na em φ, $\overline{x} = \frac{1}{x}$, e x é colinear com b e d, ou seja:

$$\begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ d & \overline{d} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(\overline{b} - \overline{d}) - \frac{1}{x}(b-d) + (b\overline{d} - d\overline{b}) = 0.$$

Ou seja, x é uma raiz da equação quadrática $x^2(\overline{b} - \overline{d}) - x(d\overline{b} - b\overline{d}) + (d-b) = 0$. E agora, o que fazemos com uma quadrática? É claro que há duas raízes, e elas são exactamente x e y. Poderíamos usar a fórmula resolvente para as calcular, mas isso não parece nada agradável, além de tirar raízes quadradas nos complexos ser um assunto complicado. Mas nós apenas queremos calcular $m = \frac{x+y}{2}$, e podemos tirá-lo directamente da equação quadrática com as fórmulas de Viète! De facto, a soma das raízes é $\frac{d\overline{b}-b\overline{d}}{\overline{b}-\overline{d}}$. Claro que ainda temos de escrever isto em termos de p, q, r, s:

$$m = \frac{x+y}{2} = \frac{d\overline{b} - b\overline{d}}{\overline{b} - \overline{d}} = \frac{\frac{2pq}{p+q} \cdot \frac{2}{s+r} - \frac{2sr}{s+r} \cdot \frac{2}{p+q}}{2\left(\frac{2}{s+r} - \frac{2}{p+q}\right)} = \frac{pq - sr}{p+q-s-r}.$$

Para provar (1) agora convém-nos simplificar $m-a, m-c, m-p, m-q$. Os dois últimos são, à partida, mais simples, e de facto

$$m - p = \frac{pq - sr - p(p+q-s-r)}{p+q-s-r} = \frac{-p^2 - sr + ps + pr}{p+q-s-r} = \frac{-(p-s)(p-r)}{p+q-r-s}$$

Assim que escrevemos o numerador, a factorização torna-se absolutamente evidente. Conjugando isto, $\overline{m} - \overline{p} = \frac{-q(p-s)(p-r)}{p(qrs+prs-pqs-pqr)}$, pelo que $\frac{m-p}{\overline{m}-\overline{p}} = \frac{p(qrs+prs-pqs-pqr)}{q(p+q-r-s)}$. Analogamente $\frac{m-q}{\overline{m}-\overline{q}} = \frac{q(qrs+prs-pqs-pqr)}{p(p+q-r-s)}$, e portanto o lado direito de (1) é $\left[\frac{qrs+prs-pqs-pqr}{p+q-r-s}\right]^2$.

Vamos então agora ao $m-a$:

$$m - a = \frac{pq - sr}{p+q-s-r} - \frac{2ps}{p+s} = \frac{p^2q - rs^2 - 2p^2s - pqs + 2ps^2 + psr}{(p+q-s-r)(p+s)}.$$

A expressão no numerador parece demasiado assimétrica, mas podemos ter alguma esperança de a factorizar; por inspeção vemos que se $p = s$ o numerador é 0, por isso vamos factorizar $p - s$ dessa expressão: o numerador é igual a $2ps(s-p) + rs(p-s) + pq(p-s) = (p-s)(pq+rs-2ps)$. Desse modo, conjugando e cortando os factores iguais

$$\frac{m-a}{\overline{m}-\overline{a}} = \frac{-(pq+rs-2ps)(qrs+prs-pqs-pqr)}{(pq+rs-2qr)(p+q-r-s)}.$$

Analogamente

$$\frac{m-b}{\overline{m}-\overline{b}} = \frac{-(pq+rs-2qr)(qrs+prs-pqs-pqr)}{(pq+rs-2ps)(p+q-r-s)}.$$

Multiplicando estas duas expressões e comparando com a do lado direito, temos (1), resolvendo o problema. □

Este problema apenas envolveu uma ideia um pouco obscura, nomeadamente usar fórmulas de Viète para calcular m. Se temos dois pontos x e y que são dados pelas raízes de um polinómio quadrático, por exemplo as intersecções de duas circunferências ou de uma circunferência e de uma recta, não é boa ideia calcula-los explicitamente, mas se quisermos criar novos pontos de forma simétrica a partir de x e de y apenas precisamos de saber $x+y$ e xy, que nos são dados pelas fórmulas de Viète. De resto foi apenas escrever a condição dos ângulos serem iguais (e isto é importante: ângulos são coisas possíveis em complexos!) e fazer as contas; estas foram o habitual, ir fazendo as coisas com cuidado e factorizar sempre que possível.

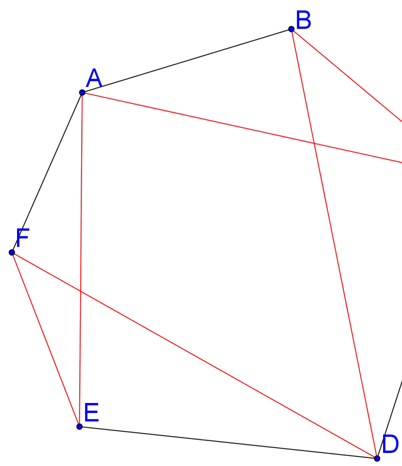
Vamos agora a mais um problema. Este, à primeira vista, não parece nada indicado para complexos: tem ângulos, razões entre segmentos e não anda à volta de uma circunferência, mas vamos ver como aqui complexos funcionam tão bem que o problema parece feito para os usar.

Problema 15 (IMO Shortlist 1998)**.** *Seja $[ABCDEF]$ um hexágono convexo tal que $\angle B + \angle D + \angle F = 2\pi$ e*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FA}} = 1.$$

Prova que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} \cdot \frac{\overline{FD}}{\overline{DB}} = 1.$$



Demonstração. A nossa única esperança de resolver o problema com complexos é conseguir de alguma forma simplificar as duas condições de forma agradável. Vamos ver o que acontece ao escrever a condição dos ângulos:

$$1 = e^{i(\angle B + \angle D + \angle F)} = \frac{\frac{b-a}{|b-a|}}{\frac{b-c}{|b-c|}} \cdot \frac{\frac{d-c}{|d-c|}}{\frac{d-e}{|d-e|}} \cdot \frac{\frac{f-e}{|f-e|}}{\frac{f-a}{|f-a|}} = -\frac{a-b}{b-c} \cdot \frac{c-d}{d-e} \cdot \frac{e-f}{f-a}. \quad (1)$$

A última igualdade vem de $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FA}} = 1$ escrito na forma de módulos. Ou seja, esta igualdade incorpora as duas condições do problema, é simples e simétrica (e o leitor pode verificar que é mesmo equivalente às duas originais)! Queremos provar que $|(b-c)(a-e)(f-d)| = |(c-a)(e-f)(d-b)|$ (2). Não é totalmente óbvio como proceder agora, e expandir estraga a simplicidade. Como tanto (1) como (2) são igualdades que envolvem diferenças entre pontos, vamos simplificar as coisas substituindo $x = a-b, u = b-c, y = c-d, v = d-e, z = e-f, w = f-a$. Nesse caso (1) é simplesmente $xyz = -uvw$; além disso facilmente vemos que $x+y+z+u+v+w = 0$ e dados x, y, z, u, v, w existem a, b, c, d, e, f que respeitem essas igualdades se e só isso acontece.

Observe-se agora que $z + w = e - a, v + z = d - f, x + u = a - c$ e $u + y = b - d$. Como tal, (2) é equivalente a $|u(z+w)(v+z)| = |z(x+u)(u+y)|$, ou seja, expandindo, $|uzv + uz^2 + uzw + uvw| = |zxy + zxu + zu^2 + zuy|$. O aparecimento de uvw do lado esquerdo e de xyz do direito leva a conjecturar que as coisas dentro dos módulos são de facto simétricas, para que estes cortem. Assim, torna-se fácil ver como terminar, e de facto temos

$$uzv+uz^2+uzw+uvw = uvw+uz(v+z+w) = -xyz-uz(x+y+z) = -(zxy+zxu+zu^2+zuy).$$

Tomando módulos, temos o que queríamos. □

A principal lição a retirar deste problema é que complexos são úteis quando há muita simetria. Além disso, substituições para simplificar as expressões são também muito úteis.

Vamos agora a um último problema. Este problema não parece de todo fazível com complexos e é um bom exemplo de como observações sintéticas e fazer as contas pela "ordem certa" podem ser cruciais.

Problema 16 (IMO Shortlist 2011)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com circuncírculo Ω. Sejam B_0 e C_0 os pontos médios de $[AC]$ e $[AB]$, respectivamente, seja G o baricentro de $[ABC]$ e seja D o pé da altura relativa a A. Seja ω uma circunferência que passa por B_0 e C_0 tangente a Ω num ponto $X \neq A$. Prova que os pontos D, G e X são colineares.*

Solução. Ao tentar abordar este problema com complexos, o ideal seria conseguir obter uma fórmula para o x. Mas aparentemente isso não é nada agradável. Como é que o poderíamos fazer? Sendo M o circuncentro de $[B_0XC_0]$ a condição da tangência é equivalente a O, M e X serem colineares onde O é o circuncentro de $[ABC]$, que pode ser escrita nos complexos (escolhendo, como sempre, um referencial em que o circuncentro de $[ABC]$ é a circunferência unitária) como $\frac{x}{\overline{x}} = \frac{m}{\overline{m}}$. Além disso podemos escrever m usando o teorema 2.8 (e notando que $x\overline{x} = 1$):

$$m = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ b_0 & b_0\overline{b_0} & 1 \\ c_0 & c_0\overline{c_0} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ b_0 & \overline{b_0} & 1 \\ c_0 & \overline{c_0} & 1 \end{vmatrix}.$$

E devido às propriedades do determinante, temos

$$\overline{\begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ b_0 & \overline{b_0} & 1 \\ c_0 & \overline{c_0} & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} \overline{x} & x & 1 \\ \overline{b_0} & b_0 & 1 \\ \overline{c_0} & c_0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ b_0 & \overline{b_0} & 1 \\ c_0 & \overline{c_0} & 1 \end{vmatrix}.$$

Deste modo, a condição $\frac{x}{\overline{x}} = \frac{m}{\overline{m}}$ fica reduzida a

$$\frac{x}{\overline{x}} = -\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ b_0 & b_0\overline{b_0} & 1 \\ c_0 & c_0\overline{c_0} & 1 \end{vmatrix} : \overline{\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ b_0 & b_0\overline{b_0} & 1 \\ c_0 & c_0\overline{c_0} & 1 \end{vmatrix}} \quad (*).$$

Infelizmente, após substituir $\overline{x} = \frac{1}{x}$ vamos obter uma equação de segundo grau em x. Como já observámos uma vez, quadráticas nos complexos não são um assunto nada agradável e preferimos manter-nos longe delas. Então precisamos de alterar um pouco a abordagem. Uma ideia seria, em vez de provar que X, D, G são colineares, provar que $[B_0YC_0]$ é tangente ao circuncírculo de $[ABC]$ onde Y é uma das intersecções de DG com o circuncírculo. Novamente temos duas intersecções e isso é um problema; e aqui é que entra uma ideia sintética importante. Uma homotetia centrada em G de factor -2 envia a circunferência dos 9 pontos de $[ABC]$ no circuncírculo de $[ABC]$; como D está na circunferência de 9 pontos, D é enviado para um ponto Z no circuncírculo; este é uma das intersecções, mas é fácil ver que não é a que queremos. Além disso, sendo A_0 o ponto médio de $[BC]$ sabemos que A_0 é enviado para A, e portanto pelas propriedades das homotetias tem-se $AZ||A_0D = BC$. Assim é fácil calcular z, pois pelos Teoremas 2.2 e 2.3 ficamos com $az = bc$, ou seja, $z = \frac{bc}{a}$; agora já é possível, e até simples, calcular y! Como $g = \frac{a+b+c}{3}$ está na corda yz o Teorema 2.3 diz que

$$\overline{g} = \frac{x+y-g}{yz} \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{3abc} = \frac{y + \frac{bc}{a} - \frac{a+b+c}{3}}{\frac{bcy}{a}} \Leftrightarrow y = \frac{a(3bc - a^2 - ab - ac)}{ab+bc+ca-3a^2}.$$

A primeira passagem resumiu-se a substituir g e z e a segunda foi apenas resolver a equação em ordem a y (o leitor é aconselhado a fazê-lo e a verificar a resposta). Para terminar, precisamos apenas de mostrar que y satisfaz de facto $(*)$, portanto vamos calcular e simplificar o determinante que aparece no lado direito usando $b_0 = \frac{a+b}{2}$ e $c_0 = \frac{a+c}{2}$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ b_0 & b_0\overline{b_0} & 1 \\ c_0 & c_0\overline{c_0} & 1 \end{vmatrix} &= y(b_0\overline{b_0} - c_0\overline{c_0}) - (b_0 - c_0) + b_0c_0(\overline{c_0} - \overline{b_0}) \\
&= y\left(\frac{(a+b)^2}{4ab} - \frac{(a+c)^2}{4ac}\right) - \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{(a+b)(a+c)}{4}\left(\frac{a+c}{2ac} - \frac{a+b}{2ab}\right) \\
&= y\frac{c(a+b)^2 - b(a+c)^2}{2abc} + \frac{c-b}{2} + \frac{(a+b)(a+c)(b-c)}{8bc}.
\end{aligned}$$

Uma vez mais, procurar factorizações é fundamental, e é relativamente óbvio que a primeira parcela, tal como todas as outras, é divisível por $b-c$. De facto, $c(a+b)^2 - b(a+c)^2 = ca^2 + cb^2 - ba^2 - bc^2 = (a^2 - bc)(c-b)$. Substituindo na expressão, limpando os denominadores e factorizando $c-b$ temos então

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ b_0 & b_0\overline{b_0} & 1 \\ c_0 & c_0\overline{c_0} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{c-b}{8abc}\left(2y(a^2 - bc) + 4abc - a(a+b)(a+c)\right) \\
&= \frac{c-b}{8abc}\left(2y(a^2 - bc) + a(3bc - a^2 - ab - ac)\right).
\end{aligned}$$

E quase magicamente apareceu-nos $a(3bc - a^2 - ab - ac)$, que é o numerador de y. Poderíamos não ter notado imediatamente nisso, substituir a expressão para o y e continuar o trabalho, mas se escrevermos $a(3bc-a^2-ab-ac)$ como $y(ab+bc+ca-3a^2)$ podemos pôr o y em evidência, ficando com

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ b_0 & b_0\overline{b_0} & 1 \\ c_0 & c_0\overline{c_0} & 1 \end{vmatrix} = \frac{c-b}{8abc}\left(2y(a^2-bc)+y(ab+bc+ca-3a^2)\right)$$

$$= \frac{(c-b)y}{8abc}\left(ab+ac-a^2-bc\right) = \frac{y(c-b)(b-a)(a-c)}{8abc}$$

Agora um cálculo fácil mostra que $\overline{\frac{(c-b)(b-a)(a-c)}{8abc}} = -\frac{(c-b)(b-a)(a-c)}{8abc}$, de onde se conclui imediatamente que y satisfaz $(*)$, resolvendo o problema. $\square$

2.3 Problemas propostos

Existe uma quantidade bastante grande de problemas que podem ser resolvidos utilizando complexos, alguns deles fáceis mas outros nem tanto. Uma coleção bastante abrangente de tais problemas (com soluções escritas) pode ser encontrada no *PDF* "O.T.M Complex Numbers in Geometry"; aqui deixamos alguns, a maioria dos quais pode até ser encontrada nesse *PDF*.

Problema 17 (Recta de Simson)**.** *Seja $[ABCP]$ um quadrilátero cíclico e sejam X, Y, Z as projeções de P em $[BC], [CA], [AB]$, respectivamente. Prova que X, Y, Z são colineares.*

Problema 18 (Teorema de Newton)**.** *Dado um quadrilátero $[ABCD]$ com uma circunferência inscrita, sejam M e N os pontos médios de $[AC]$ e $[AB]$, respectivamente. Mostra que o incentro de $[ABCD]$ está na recta MN.*

Problema 19 (IMO 2000)**.** *Seja $[A_1A_2A_3]$ um triângulo acutângulo. Os pés das perpendiculares por A_i são K_i e o incírculo de $[A_1A_2A_3]$ toca o lado oposto a A_i em L_i. A recta K_iK_j é reflectida na recta L_iL_j e dá origem à recta $s_{i,j}$.*

Mostra que as rectas $s_{1,2}, s_{2,3}, s_{3,1}$ se intersectam duas a duas no incírculo.

Problema 20 (ISL 2006)**.** *Pontos A_1, B_1, C_1 são escolhidos nos lados $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ de um triângulo $[ABC]$, respectivamente. Os circuncírculos dos triângulos $[AB_1C_1], [BC_1A_1], [CA_1B_1]$ instersectam o circuncírculo de $[ABC]$ novamente nos pontos A_2, B_2, C_2, respectivamente ($A_2 \neq A, B_2 \neq B, C_2 \neq C$). Pontos A_3, B_3, C_3 são simétricos a A_1, B_1, C_1 relativamente aos pontos médios dos lados $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, respecivamente. Prova que os triângulos $[A_2B_2C_2]$ e $[A_3B_3C_3]$ são semelhantes.*

Problema 21 (Balkan 2014)**.** *Seja $[ABCD]$ um trapézio inscrito numa circunferência Γ com diâmetro AB. Seja E a intersecção das diagonais AC e BD. A circunferência com centro B e raio $\overline{BE}$ intersecta Γ nos pontos K e L (onde K está no mesmo lado de AB que C). A recta perpendicular a BD por E intersecta CD em M. Prova que KM é perpendicular a DL.*

Problema 22 (ISL 2013)**.** *Seja* $[ABCDEF]$ *um hexágono convexo com* $\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}, \overline{CD} = \overline{FA}$*, e* $\angle A - \angle D = \angle E - \angle B = \angle C - \angle F$*. Prova que as diagonais* AD, BE *e* CF *são concorrentes.*

Problema 23 (China 1998)**.** *Dados* 3 *pontos* A, B, C*, encontra o lugar geométrico dos pontos* D *que verificam*

$$\overline{DA} \times \overline{DB} \times \overline{AB} + \overline{DB} \times \overline{DC} \times \overline{BC} + \overline{DC} \times \overline{DA} \times \overline{CA} = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CA}.$$

3 Trigonometria

Trigonometria é uma forma por vezes muito inteligente de fazer brute force, e é aplicável num grande número de problemas.

3.1 Brincando com a Lei dos Senos

A Lei dos Senos será o o nosso principal instrumento enquanto trabalharmos com trigonometria. Nesta subsecção vamos mostrar como aplicar a Lei dos Senos de forma relativamente "bonita", isto é, sem precisarmos realmente de manipular identidades com razões trigonométricas.

Vamos começar por enunciar este precioso teorema:

Teorema 3.1 (Lei dos Senos)**.** *Seja* $[ABC]$ *um triângulo com circunraio* R*, sejam* $\alpha = C\widehat{A}B$*,* $\beta = A\widehat{B}C$ *e* $\gamma = B\widehat{C}A$*,* $a = \overline{BC}$*,* $b = \overline{AC}$*,* $c = \overline{AB}$*. Então*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Demonstração. Seja M o ponto médio de $[BC]$. Pelo Teorema do Arco Capaz é fácil ver que $C\widehat{O}M = \alpha$, onde O é o circuncentro de $[ABC]$, e portanto $\overline{CM} = R\sin\alpha$. Analogamente, $\overline{BM} = R\sin\alpha$, pelo que $a = 2R\sin\alpha$, ou seja, $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. As outras igualdades são análogas. □

Qual a utilidade deste teorema? Ele permite-nos converter razões entre comprimentos em razões entre senos, o que pode permitir transformar problemas de geometria em identidades trigonométricas, como veremos mais adiante. Mas também pode ser usado de maneira relativamente elegante, como vamos ver nos próximos exemplos.

Uma consequência simples da Lei dos Senos é o Teorema da Bissectriz Generalizado:

Teorema 3.2 (Bissectriz Generalizado)**.** *Seja* D *um ponto no lado* $[BC]$[1] *do triângulo* $[ABC]$*. Então,*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\sin(D\widehat{A}B)}{\sin(C\widehat{A}D)}.$$

Demonstração. Temos, pela Lei dos Senos no triângulo $[ABD]$,

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(D\widehat{A}B)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(B\widehat{D}A)},$$

e, analogamente, pela Lei dos Senos no triângulo $[DCA]$,

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(C\widehat{A}D)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(C\widehat{A}D)}.$$

Dividindo estas duas igualdades e usando o facto de que $\sin(B\widehat{D}A) = \sin(A\widehat{D}C)$ (pois os dois ângulos são suplementares), temos o pretendido. □

[1] Usando comprimentos/ângulos orientados podemos generalizar isto para qualquer ponto na recta BC.

Note-se que no caso em que $D\widehat{A}B = C\widehat{A}D$, temos o Teorema da Bissectriz normal.

É fácil ver que um ponto no lado $[BC]$ (ou na recta BC, se considerarmos distâncias orientadas) fica completamente determinado pela razão $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$. Então obtemos que uma ceviana AD é completamente determinada pela razão $\frac{\sin(D\widehat{A}B)}{\sin(C\widehat{A}D)}$. Temos a seguinte consequência "algébrica":

Lema 3.3. *Se $a, b, c, d \in]0, \pi[$ são reais tais que $a + b = c + d$ e $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin c}{\sin d}$, então $a = c$ e $b = d$.*

Um outro exemplo de um resultado útil que é consequência da Lei dos Senos é o Teorema de Ceva Trigonométrico:

Teorema 3.4 (Ceva trigonométrico)**.** *Sejam D, E, F pontos nos lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respectivamente, do triângulo $[ABC]$. Então as rectas AD, BE e CF são concorrentes se e só se*

$$\frac{\sin(C\widehat{A}D)}{\sin(D\widehat{A}B)} \cdot \frac{\sin(A\widehat{B}E)}{\sin(E\widehat{B}C)} \cdot \frac{\sin(B\widehat{C}F)}{\sin(F\widehat{C}A)} = 1.$$

Demonstração. Se as rectas AD, BE e CF são concorrentes num ponto P, então temos $\frac{\sin(B\widehat{C}F)}{\sin(E\widehat{B}C)} = \frac{\sin(B\widehat{C}P)}{\sin(P\widehat{B}C)} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}$, pela Lei dos Senos. Analogamente, $\frac{\sin(C\widehat{A}D)}{\sin(F\widehat{C}A)} = \frac{\overline{CP}}{\overline{AP}}$ e $\frac{\sin(A\widehat{B}E)}{\sin(D\widehat{A}B)} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$. Multiplicando estas três igualdades,

$$\frac{\sin(C\widehat{A}D)}{\sin(D\widehat{A}B)} \cdot \frac{\sin(A\widehat{B}E)}{\sin(E\widehat{B}C)} \cdot \frac{\sin(B\widehat{C}F)}{\sin(F\widehat{C}A)} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = 1$$

como pretendido.

Suponhamos agora que esta igualdade se verifica e sejam $P = BE \cap CF$ e $D' = AP \cap BC$. Então, pelo que já provámos acima, $\frac{\sin(C\widehat{A}D')}{\sin(D'\widehat{A}B)} \cdot \frac{\sin(A\widehat{B}E)}{\sin(E\widehat{B}C)} \cdot \frac{\sin(B\widehat{C}F)}{\sin(F\widehat{C}A)} = 1$; por outro lado, $\frac{\sin(C\widehat{A}D)}{\sin(D\widehat{A}B)} \cdot \frac{\sin(A\widehat{B}E)}{\sin(E\widehat{B}C)} \cdot \frac{\sin(B\widehat{C}F)}{\sin(F\widehat{C}A)} = 1$, logo

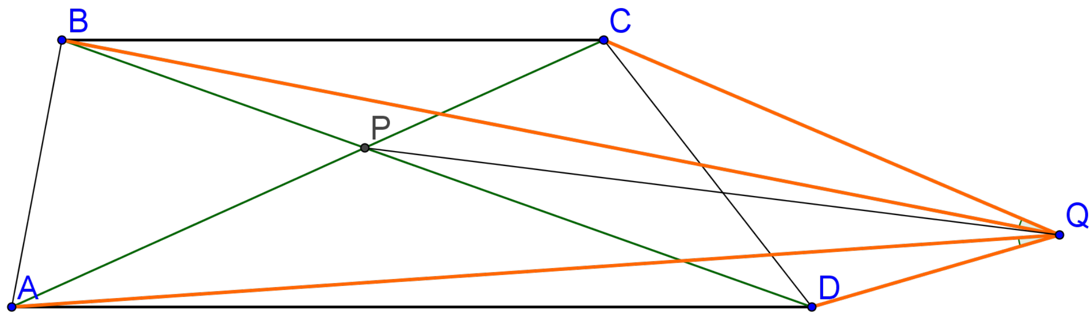
$$\frac{\sin(C\widehat{A}D')}{\sin(D'\widehat{A}B)} = \frac{\sin(C\widehat{A}D)}{\sin(D\widehat{A}B)}$$

e isto implica $D = D'$ pelo que vimos atrás (pelo Lema **??**, por exemplo). Assim, AD, BE e CF concorrem em P. $\square$

Vamos agora atacar um problema "a sério", o G3 da Shortlist de 2007.

Problema 24 (IMO Shortlist 2007)**.** *Seja $[ABCD]$ um trapézio tal que AD é paralela a BC. As diagonais AC e BD intersectam-se em P. O ponto Q está entre as rectas paralelas AD e BC e é tal que $A\widehat{Q}D = C\widehat{Q}B$, e a recta CD separa os pontos P e Q. Mostra que $B\widehat{Q}P = D\widehat{A}Q$.*

Solução. Comecemos por observar que o problema é simétrico nas rectas AD e BC (se "trocarmos" A com B e C com D, o desenho fica o mesmo). Então, se se verifica sempre $B\widehat{Q}P = D\widehat{A}Q$, também será, analogamente, verificado $P\widehat{Q}A = Q\widehat{B}C$.



A princípio, esta observação parece pouco útil. Mas notemos que a *soma* destas duas igualdades análogas é muito fácil de provar com angle-chasing:

$$\begin{aligned} B\widehat{Q}P + P\widehat{Q}A = D\widehat{A}Q + Q\widehat{B}C &\Leftrightarrow B\widehat{Q}A = D\widehat{A}Q + Q\widehat{B}C \\ &\Leftrightarrow \pi - Q\widehat{A}B - A\widehat{B}Q = (D\widehat{A}B - Q\widehat{A}B) + (A\widehat{B}C - A\widehat{B}Q) \\ &\Leftrightarrow D\widehat{A}B + A\widehat{B}C = \pi \end{aligned}$$

o que é verdade pois AD e BC são paralelas.

E agora? Para que nos é útil esta igualdade? A verdade é que usar a Lei dos Senos é agora muito sugestivo: pelo nosso valioso Lema **??**, basta-nos provar que $\frac{\sin(B\widehat{Q}P)}{\sin(P\widehat{Q}A)} = \frac{\sin(D\widehat{A}Q)}{\sin(Q\widehat{B}C)}$!

Pelo Teorema de Ceva Trigonométrico no triângulo $[ABQ]$, usando as cevianas concorrentes AC, BD, QP, temos

$$\frac{\sin(B\widehat{Q}P)}{\sin(P\widehat{Q}A)} \cdot \frac{\sin(Q\widehat{A}C)}{\sin(C\widehat{A}B)} \cdot \frac{\sin(A\widehat{B}D)}{\sin(D\widehat{B}Q)} = 1.$$

Logo,

$$\frac{\sin(B\widehat{Q}P)}{\sin(P\widehat{Q}A)} = \frac{\sin(C\widehat{A}B)}{\sin(Q\widehat{A}C)} \cdot \frac{\sin(D\widehat{B}Q)}{\sin(A\widehat{B}D)} \tag{1}$$

e temos, pela Lei dos Senos nos triângulos $[ACQ]$ e $[CAB]$,

$$\frac{\sin(C\widehat{A}B)}{\sin(Q\widehat{A}C)} = \frac{\left(\frac{\sin(C\widehat{A}B)}{\overline{BC}}\right)}{\left(\frac{\sin(Q\widehat{A}C)}{\overline{CQ}}\right)} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CQ}} = \frac{\left(\frac{\sin(A\widehat{B}C)}{\overline{AC}}\right)}{\left(\frac{\sin(C\widehat{Q}A)}{\overline{AC}}\right)} = \frac{\sin(A\widehat{B}C)}{\sin(C\widehat{Q}A)} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CQ}}$$

e pela Lei dos Senos no triângulo $[BCQ]$, isto fica

$$\frac{\sin(C\widehat{A}B)}{\sin(Q\widehat{A}C)} = \frac{\sin(A\widehat{B}C)}{\sin(C\widehat{Q}A)} \cdot \frac{\sin(C\widehat{Q}B)}{\sin(Q\widehat{B}C)}.$$

Analogamente,

$$\frac{\sin(A\widehat{B}D)}{\sin(D\widehat{B}Q)} = \frac{\sin(D\widehat{A}B)}{\sin(B\widehat{Q}D)} \cdot \frac{\sin(A\widehat{Q}D)}{\sin(D\widehat{A}Q)}.$$

Dividindo estas duas equações e substituindo em (**??**), obtemos finalmente

$$\frac{\sin(B\widehat{Q}P)}{\sin(P\widehat{Q}A)} = \frac{\sin(A\widehat{B}C)}{\sin(D\widehat{A}B)} \cdot \frac{\sin(B\widehat{Q}D)}{\sin(C\widehat{Q}A)} \cdot \frac{\sin(C\widehat{Q}B)}{\sin(A\widehat{Q}D)} \cdot \frac{\sin(D\widehat{A}Q)}{\sin(Q\widehat{B}C)}.$$

Agora estamos quase: note-se que $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C = \pi$, logo $\sin(A\widehat{B}C) = \sin(D\widehat{A}B)$. Além disso, $A\widehat{Q}D = C\widehat{Q}B$, logo $\sin(A\widehat{Q}D) = \sin(C\widehat{Q}B)$; e esta igualdade de ângulos implica ainda $C\widehat{Q}A = B\widehat{Q}D$, logo $\sin(C\widehat{Q}A) = \sin(B\widehat{Q}D)$. Portanto,

$$\frac{\sin(B\widehat{Q}P)}{\sin(P\widehat{Q}A)} = \frac{\sin(D\widehat{A}Q)}{\sin(Q\widehat{B}C)}$$

e, pelo que vimos atrás, isto conclui o problema! $\square$

Nestes exemplos não fizemos uso de nenhuma propriedade especial do seno: na verdade, só precisámos do facto de que existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, em qualquer triângulo $[ABC]$, $\frac{\overline{BC}}{f(C\widehat{A}B)} = \frac{\overline{AC}}{f(A\widehat{B}C)} = \frac{\overline{AB}}{f(B\widehat{C}A)}$. Nem sempre será assim, e por vezes teremos de fazer manipulações algébricas envolvendo as fórmulas do seno/co-seno da soma/diferença.

3.2 Trigonometria pesada

Aqui é que as coisas se tornam mais feias. Vamos precisar de fazer grandes manipulações algébricas envolvendo razões trigonométricas, e para tal precisaremos de algumas identidades.

Facto 3.5. *Têm-se as identidades:*

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

- $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Alguns casos particulares destas identidades são de destacar: por exemplo, tem-se $\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin x \cos x$ e $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$; usando $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, isto fica $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$. Além disso, destas identidades podemos obter outras, que nos serão úteis para provar grandes identidades trigonométricas.

Facto 3.6 (Identidades que transformam produtos em somas)**.** *Tem-se:*

- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$.
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

Estas identidades são fáceis de obter como consequência das do Facto **??**. Por exemplo, $\sin a \sin b = \frac{(\cos a \cos b + \sin a \sin b) - (\cos a \cos b - \sin a \sin b)}{2} = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$, e as outras identidades deduzem-se de forma semelhante. Por vezes saber como se obtêm estas identidades é uma estratégia melhor do que memorizá-las todas. O mesmo vale para as seguintes:

Facto 3.7 (Identidades que transformam somas em produtos)**.** *Tem-se:*

- $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.
- $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.
- $\cos a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$.

A ideia da prova destas identidades é escrever $a = x + y$, $b = x - y$ e usar as identidades de **??**. Nesse caso temos $x = \frac{a+b}{2}$ e $y = \frac{a-b}{2}$; para a primeira identidade, por exemplo, temos $\sin a + \sin b = \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$.

Por fim, uma identidade bonita e muito especial:

Facto 3.8 (Identidade de Arala-Moreira)**.** *Tem-se a identidade*

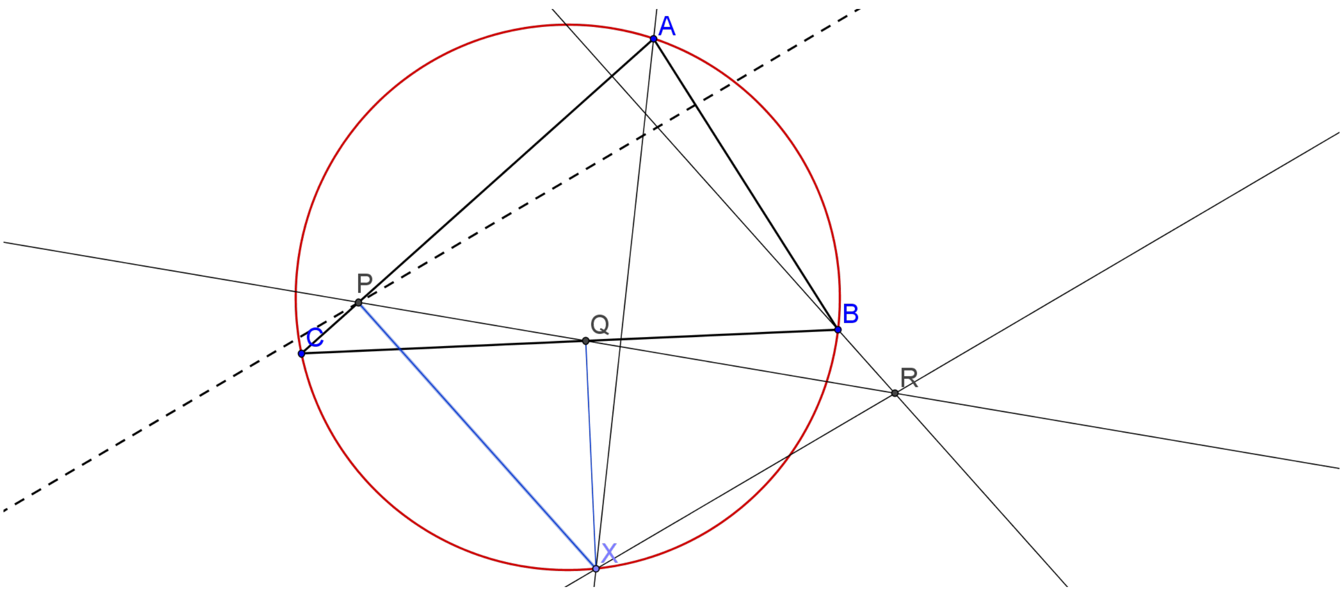
$$\sin^2(x) - \sin^2(y) = \sin(x+y)\sin(x-y).$$

Por vezes é útil conhecer algumas fórmulas trigonométricas para distâncias num triângulo. Algumas destas estão incluídas no Apêndice **??**.

Vamos destruir um problema de um TST americano com trigonometria para exemplificar as ideias gerais deste tipo de abordagem.

Problema 25 (TST EUA 2014)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo, e seja X um ponto no menor arco BC da sua circunferência circunscrita. Sejam P e Q as projecções ortogonais de X sobre as rectas CA e CB, respectivamente. Seja R a intersecção da recta PQ com a recta perpendicular a AC por B. Seja l a recta que passa por P e é paralela a XR. Prova que, quando X varia, a recta l passa por um ponto fixo.*

Solução. O primeiro passo é sempre o mesmo: fazer um desenho grande onde possamos fazer angle-chasing.



Como atacar a condição "a recta l passa por um ponto fixo"? O que nos daria jeito seria ter uma ideia de qual é esse ponto fixo. Vamos analisar alguns pontos X particulares para ter uma ideia de qual será o ponto.

A recta perpendicular a AB por B e a AC por C intersectam-se num ponto na circunferência circunscrita (o ponto diametralmente oposto a A): vamos ver o que acontece quando X é esse ponto. Nesse caso, $P = C$ e $R = B$; a recta paralela a XR por P é a recta perpendicular a AB por C, ou seja, a altura relativa a C.

E mais? Podemos ver o que acontece quando X tende para B. Nesse caso o ponto P tende para a projecção ortogonal de B sobre AC; e Q tende para B. Ver para onde tende R é mais complicado; mas tende para um ponto na perpendicular a AC por B, logo a recta XR tende para esta perpendicular. Assim a paralela a XR por P tende para a perpendicular a AC por B, ou seja, para a altura relativa a B. O nosso ponto fixo está nas alturas relativas a B e a C: é o ortocentro de $[ABC]$!

Seja então H o ortocentro de $[ABC]$; queremos provar que PH é paralela a XR. Podemos tentar provar que $P\widehat{X}P + X\widehat{P}H = \pi$; estes ângulos, infelizmente, não são directamente calculáveis. Podemos tentar usar o truque da cotangente, que vamos explicar mais à frente. Mas as contas tornam-se realmente muito más, e há uma maneira natural e menos feia de abordar isto com trigonometria. Como as rectas XP e RH são paralelas, queremos provar que $[XPHR]$ é um paralelogramo. E como as rectas XP e RH são paralelas, basta provar que $\overline{XP} = \overline{RH}$!

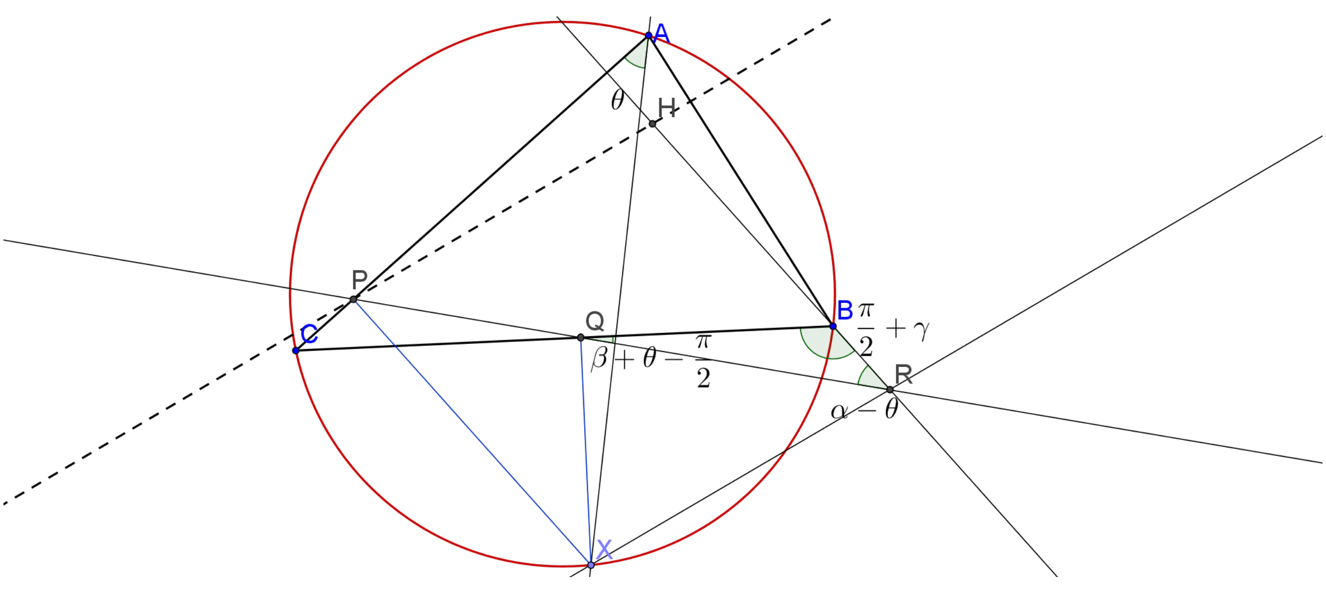
Como calcular estes comprimentos? Precisamos de um plano, antes de começar a fazer as contas. A ideia é usar a Lei dos Senos em triângulos dos quais conhecemos os ângulos todos para calcular comprimentos; vamos ver quais ângulos são calculáveis.

Primeiro: de que ângulos precisamos para definir a figura? Vamos usar a notação habitual para os ângulos de $[ABC]$: $\alpha = C\widehat{A}B$, $\beta = A\widehat{B}C$, $\gamma = B\widehat{C}A$. Precisamos ainda de um ângulo para definir a posição de X: $\theta = C\widehat{A}X$. O resto é determinado por estes ângulos.

E comprimentos? A Lei dos Senos dá-nos $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$; ora nós podemos aplicar uma homotetia à figura de modo que $R = \frac{1}{2}$, e, portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$ e $c = \sin\gamma$. Melhor: para quaisquer pontos X, Y e Z na circunferência circunscrita temos $\overline{XZ} = \sin(X\widehat{Y}Z)$! Esta é uma prática habitual em trigonometria e simplifica bastante as contas.

O quadrilátero $[CPQX]$ é cíclico, pois $C\widehat{P}X = C\widehat{Q}X = \frac{\pi}{2}$, o que nos permite fazer angle-chasing envolvendo a recta PQ. Calcular $\overline{XP}$ é fácil: conhecemos $\overline{XC}$ (pois conhecemos $C\widehat{A}X = \theta$) e conhecemos $X\widehat{C}P = X\widehat{C}A = \pi - A\widehat{X}C - C\widehat{A}X = \pi - \theta - \beta$. Então temos tudo o que precisamos para calcular $\overline{XP}$: como $\overline{XC} = \sin(C\widehat{A}X) = \sin\theta$, $\overline{XP} = \sin\theta\sin(X\widehat{C}P) = \sin\theta\sin(\pi-\theta-\beta) = \sin\theta\sin(\beta+\theta)$.

E $\overline{RH}$? Temos $\overline{RH} = \overline{BR} + \overline{BH}$; vamos começar por $\overline{BR}$. Podemos calcular este comprimento usando a Lei dos Senos em $[BRQ]$, do qual conhecemos todos os ângulos e o comprimento $\overline{BQ}$. Por sua vez, $\overline{BH}$ pode ser calculado com Lei dos Senos no triângulo $[BHA]$.



Os ângulos assinalados na figura são fáceis de obter: temos $H\widehat{B}C = \frac{\pi}{2} - \gamma$ pois BH é perpendicular a AC. Além disso, $B\widehat{R}Q = X\widehat{P}Q$ (note-se que XP e BH são ambas perpendiculares a AC, pelo que são paralelas) e $X\widehat{P}Q = X\widehat{C}Q = X\widehat{C}B = X\widehat{C}A = \alpha - \theta$. Por fim, $R\widehat{Q}B = \pi - (\frac{\pi}{2} + \gamma) - (\alpha - \theta) = (\pi - \gamma - \alpha) + \theta = \beta + \theta$.

Temos $\overline{BX} = \sin(X\widehat{A}B) = \sin(\alpha - \theta)$, logo $\overline{BX} = \sin(\alpha - \theta)$. Como $Q\widehat{B}X = C\widehat{B}X = C\widehat{A}X = \theta$, $\overline{BQ} = \overline{BX}\cos(Q\widehat{B}X) = \sin(\alpha - \theta)\cos\theta$.

Agora, pela Lei dos Senos no triângulo $[BRQ]$,

$$\frac{\overline{BR}}{\sin(\beta + \theta - \frac{\pi}{2})} = \frac{\overline{BQ}}{\sin(\alpha - \theta)}$$

pelo que

$$\overline{BR} = \overline{BQ} \cdot \frac{\sin(\beta + \theta - \frac{\pi}{2})}{\sin(\alpha - \theta)} = -\overline{BQ} \cdot \frac{\cos(\beta + \theta)}{\sin(\alpha - \theta)} = -\cos\theta\cos(\beta + \theta).$$

Falta $\overline{BH}$[2]. Temos $H\widehat{A}B = \frac{\pi}{2} - \beta$ e $A\widehat{B}H = \frac{\pi}{2} - \alpha$, logo $B\widehat{H}A = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha) - (\frac{\pi}{2} - \beta) = \alpha + \beta = \pi - \gamma$. Então, pela Lei dos Senos no triângulo $[BHA]$,

$$\frac{\overline{BH}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\pi - \gamma)},$$

ou seja,

$$\overline{BH} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)}{\sin(\pi - \gamma)} \sin\gamma \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\gamma} = \cos\beta.$$

As nossas contas acabaram. Obtivemos assim:

$$\overline{XP} = \sin\theta\sin(\beta + \theta)$$

$$\overline{RH} = \cos\beta - \cos\theta\cos(\beta + \theta)$$

Deram-nos resultados diferentes; enganámo-nos nas contas! Não, simplesmente temos uma identidade trigonométrica para provar; e provavelmente poderemos obtê-la através das identidades atrás mostradas. Queremos provar que $\sin\theta\sin(\beta + \theta) = \cos\beta - \cos\theta\cos(\beta + \theta)$; ora, isto equivale a

$$\cos\theta\cos(\beta + \theta) + \sin\theta\sin(\beta + \theta) = \cos\beta$$

e, pela fórmula do co-seno da diferença, o lado esquerdo é igual a $\cos(\theta - (\beta + \theta)) = \cos(-\beta) = \cos(\beta)$, e o problema está resolvido! $\square$

Neste exemplo não precisámos de nenhuma ideia especial depois de termos "adivinhado" o ponto fixo: a ideia de provar que $\overline{XP} = \overline{RH}$ é bastante natural, e depois fomos calculando os comprimentos à custa dos ângulos que tínhamos, com a Lei dos Senos, até reduzirmos o problema a uma identidade trigonométrica. Agora vamos explorar um "truque" novo, o *truque da cotangente*[3].

[2] O Apêndice **??** fornece uma fórmula para esta distância, mas vamos mostrar aqui a prova como exemplo.

[3] A cotangente é o inverso multiplicativo da tangente, $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.

3.2.1 Truque da cotangente

Suponhamos que, para alguns ângulos x e y, conhecemos a soma $S = x + y$ e a razão $r = \frac{\sin x}{\sin y}$. Como "calcular" x e y?

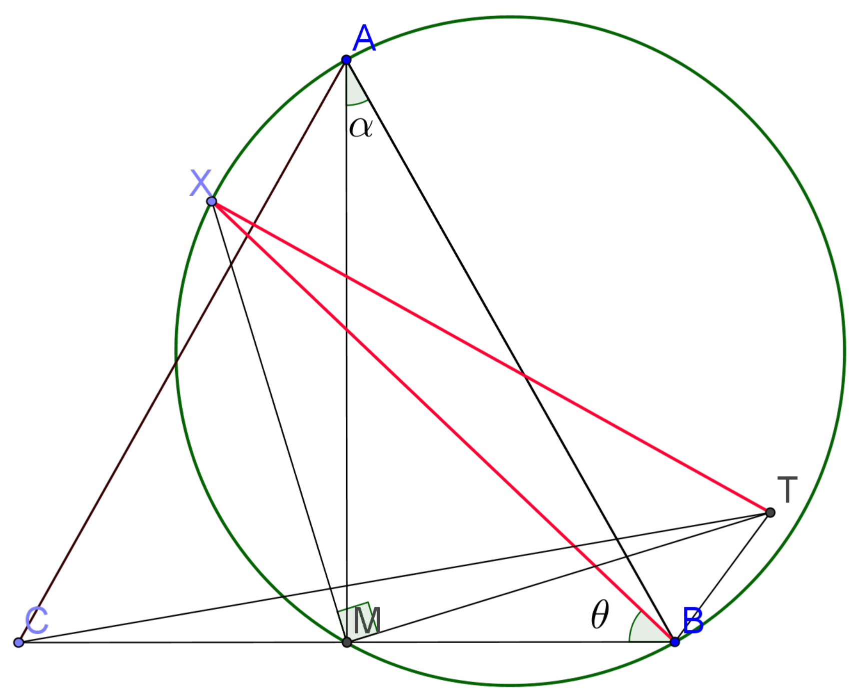
Note-se que $r = \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin(S-y)}{\sin y} = \frac{\sin S \cos y + \cos S \sin y}{\sin y} = \sin S \cot y + \cos S$, e isto é uma equação do primeiro grau em $\cot y$. De modo análogo, podemos obter o valor de $\cot x$.

Para que é que isto serve?

Suponhamos por exemplo que temos um triângulo do qual conhecemos o comprimento de dois lados e o ângulo formado por eles. Com o truque da cotangente, podemos determinar as cotangentes dos outros dois ângulos; de facto, conhecemos a sua soma, e, pela Lei dos Senos, conhecemos a razão entre os seus senos. Vamos ver este truque a funcionar num exemplo, o G2 da Shortlist de 2007.

Problema 26 (IMO Shortlist 2007)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com $\overline{AB} = \overline{AC}$, e seja M o ponto médio de $[BC]$. Seja X um ponto no menor arco AM da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABM]$. O ponto T está no interior do ângulo $\angle BMA$ e é tal que $TM \perp MX$ e $\overline{TX} = \overline{BX}$.*

Mostra que a diferença $B\widehat{T}M - C\widehat{T}M$ não depende da escolha de X.



Solução. A convenção usual é $\alpha = C\widehat{A}B$, mas este problema é mais centrado no triângulo $[ABM]$, e portanto seja $\alpha = M\widehat{A}B$. Seja $\theta = X\widehat{B}M$ e suponhamos sem perda de generalidade que a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABM]$ tem raio $\frac{1}{2}$.

Então temos $\overline{BM} = \sin\alpha$ e, como $X\widehat{A}B = X\widehat{A}M + M\widehat{A}B = \alpha + \theta$, $\overline{BX} = \sin(\alpha+\theta)$. Vamos tentar usar o truque da cotangente para calcular os ângulos $B\widehat{T}M$ e $C\widehat{T}M$.

No triângulo $[BMT]$, conhecemos o comprimento $\overline{BM}$; também conhecemos $B\widehat{M}T$, pois, como $B\widehat{M}A = T\widehat{M}X = \frac{\pi}{2}$, $B\widehat{M}T = A\widehat{M}X = A\widehat{B}X = A\widehat{B}M - X\widehat{B}M = \frac{\pi}{2} - \alpha - \theta$. Por fim, conhecemos $\overline{TM}$, pois, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo rectângulo $[TMX]$,

$$\overline{TM}^2 = \overline{TX}^2 - \overline{MX}^2 = \overline{BX}^2 - \overline{MX}^2 = \sin^2(\alpha+\theta) - \sin^2\theta.$$

Podemos transformar isto numa expressão um pouco mais agradável usando a Identidade de Arala-Moreira:

$$\overline{TM}^2 = \sin((\alpha+\theta)+\theta)\sin((\alpha+\theta)-\theta) = \sin(\alpha+2\theta)\sin\alpha,$$

ou seja, $\overline{TM} = \sqrt{\sin(\alpha+2\theta)\sin\alpha}$.

Temos tudo aquilo de que precisamos para aplicar o truque da cotangente. Seja $x = B\widehat{T}M$. Então, como $B\widehat{M}T = \frac{\pi}{2} - \alpha - \theta$, $T\widehat{B}M = \frac{\pi}{2} + \alpha + \theta - x$. Logo, temos

$$\frac{\cos(x-\alpha-\theta)}{\sin x} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha+\theta-x)}{\sin x} = \frac{\overline{TM}}{\overline{BM}} = \frac{\sqrt{\sin(\alpha+2\theta)\sin\alpha}}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha}}.$$

Ou seja,

$$\frac{\cos(\alpha+\theta)\cos x + \sin(\alpha+\theta)\sin x}{\sin x} = \sqrt{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha}}$$

$$\cos(\alpha+\theta)\cot x + \sin(\alpha+\theta) = \sqrt{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha}}$$

$$\cot x = \frac{\sqrt{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha}} - \sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}.$$

Seja agora $y = C\widehat{T}M$. Calcular $\cot y$ é semelhante: note-se que $T\widehat{M}C = \pi - B\widehat{M}T = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha - \theta) = \frac{\pi}{2} + \alpha + \theta$. Então $M\widehat{C}T = \frac{\pi}{2} - \alpha - \theta - y$. Logo,

$$\frac{\cos(y+\alpha+\theta)}{\sin y} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha-\theta-y)}{\sin y} = \frac{\overline{TM}}{\overline{CM}} = \sqrt{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha}}$$

$$\frac{\cos(\alpha+\theta)\cos y - \sin(\alpha+\theta)\sin y}{\sin y} = \sqrt{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha}}$$

$$\cos(\alpha+\theta)\cot y - \sin(\alpha+\theta) = \sqrt{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha}}$$

$$\cot y = \frac{\sqrt{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha}} + \sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}.$$

Já temos as cotangentes dos dois ângulos: e agora, o que fazer com elas? Queremos calcular $x - y$; ora,

$$\cot(x-y) = \frac{1}{\tan(x-y)} = \frac{1+\tan x \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{1 + \frac{1}{\cot x \cot y}}{\frac{1}{\cot x} - \frac{1}{coty}} = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}.$$

Note-se que vamos precisar de subtrair as cotangentes e de multiplicá-las; em ambas a raiz desaparece (finalmente!), na primeira porque simplesmente corta e na segunda por causa de uma diferença de quadrados. Então,

$$\begin{aligned}\cot(x-y) &= \frac{\frac{\left(\sqrt{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha}} - \sin(\alpha+\theta)\right)\left(\sqrt{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha}} + \sin(\alpha+\theta)\right)}{\cos^2(\alpha+\theta)} + 1}{\frac{2\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}} \\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha} - \sin^2(\alpha+\theta) + \cos^2(\alpha+\theta)}{2\sin(\alpha+\theta)\cos(\alpha+\theta)} \\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\sin\alpha} + \cos(2\alpha+2\theta)}{\sin(2\alpha+2\theta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha+2\theta) + \sin\alpha\cos(2\alpha+2\theta)}{\sin\alpha\sin(2\alpha+2\theta)}.\end{aligned}$$

Queremos provar que esta expressão não depende de θ. Observe-se que $(2\alpha+2\theta)-\alpha = \alpha+2\theta$; ora, pela fórmula do seno da diferença, isto implica $\sin(\alpha+2\theta) = \sin(2\alpha+2\theta)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(2\alpha+2\theta)$, ou seja, $\sin(\alpha+2\theta) + \sin\alpha\cos(2\alpha+2\theta) = \sin(2\alpha+2\theta)\cos\alpha$. Assim,

$$\cot(x-y) = \frac{\sin(2\alpha+2\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha\sin(2\alpha+2\theta)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$

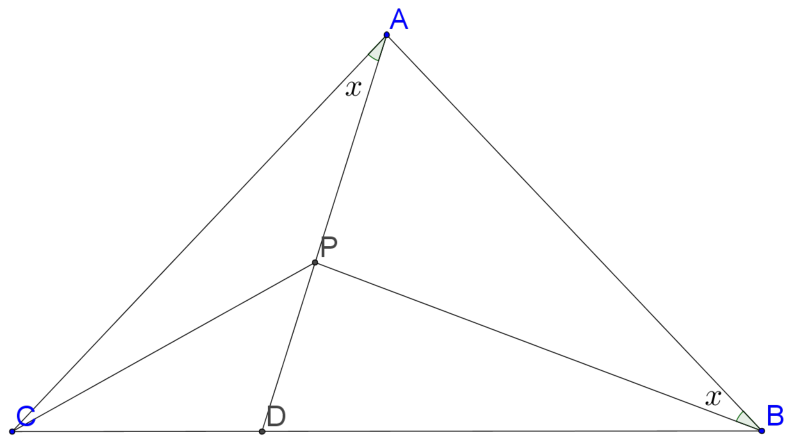
pelo que $x - y = \alpha$ (já que a função cotangente é injectiva no intervalo $]0,\pi[$) e isto não depende de θ, logo o problema está acabado! $\square$

Nem sempre é viável escrever de forma agradável todos os parâmetros que definem a figura. Por vezes podemos "guardar" alguma informação na forma de uma equação trigonométrica e reduzir aquilo que queremos provar a outra equação trigonométrica, e depois provar que as duas são equivalentes. Vamos ver um exemplo.

Problema 27. *Seja $[ABC]$ um triângulo com $\overline{AB} = \overline{AC}$. Seja D o ponto de $[BC]$ tal que $\overline{BD} = 2\overline{CD}$. Se P é o ponto de $[AD]$ tal que $A\widehat{B}P = C\widehat{A}P$, mostra que $C\widehat{A}B = 2C\widehat{P}D$.*

Solução. Sejam $\alpha = C\widehat{A}B$ e $x = C\widehat{A}D = C\widehat{A}P = A\widehat{B}P$. Seja P' o ponto de $[AD]$ tal que $C\widehat{A}B = 2C\widehat{P'}D$. Queremos provar que $P' = P$; isto equivale a provar que $\overline{DP'} = \overline{DP}$.

No angle-chasing que vamos fazer a seguir, para usarmos a Lei dos Senos e calcularmos estes comprimentos, vamos utilizar os ângulos α e x. É claro que estes ângulos não são independentes:



cada um determina o outro. Pelo Teorema da Bissectriz Generalizado (Teorema **??**) e usando o facto de que $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = 2$ e $\overline{AB} = \overline{AC}$, temos

$$\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} = 2. \tag{2}$$

É claro que agora podemos "determinar x" em função de α, usando o truque da cotangente. Mas isso não tornaria fácil usar o ângulo x no angle-chasing que vamos fazer a seguir, pelo que, em vez disso, vamos manter a informação que temos sobre a relação entre α e x na forma de (**??**). Vamos tentar reduzir aquilo que queremos provar a (**??**).

Temos $C\widehat{P'}D = \frac{\alpha}{2}$, logo $A\widehat{P'}C = \pi - \frac{\alpha}{2}$ e $P\widehat{C}A = \frac{\alpha}{2} - x$. Como $B\widehat{C}A = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $D\widehat{C}P' = (\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) - (\frac{\alpha}{2} - x) = \frac{\pi}{2} - \alpha + x$. Pela Lei dos Senos no triângulo $[CP'D]$,

$$\frac{\overline{DP'}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha + x)} = \frac{\overline{CD}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\overline{DP'} = \overline{CD} \cdot \frac{\cos(\alpha - x)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Agora calculemos $\overline{DP}$. Temos $P\widehat{B}D = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - x$. Além disso, $D\widehat{P}B = P\widehat{A}B + A\widehat{B}P = \alpha$. Logo, pela Lei dos Senos no triângulo $[PBD]$,

$$\frac{\overline{DP}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - x)} = \frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}$$

$$\overline{DP} = \overline{BD} \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2} + x)}{\sin\alpha}.$$

Queremos assim provar que $\overline{CD} \cdot \frac{\cos(\alpha - x)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \overline{BD} \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2}+x)}{\sin\alpha}$; como $\overline{BD} = 2\overline{CD}$, isto reduz-se a $\frac{\cos(\alpha-x)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\cos(\frac{\alpha}{2}+x)}{\sin\alpha}$. Usando $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, isto fica

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos(\alpha - x) = \cos(\frac{\alpha}{2} + x).$$

E agora? Um primeiro passo é transformar o produto do lado esquerdo numa soma, usando o Facto **??**: ficamos com

$$\cos(\frac{\alpha}{2} - x) + \cos(\frac{3\alpha}{2} - x) = 2\cos(\frac{\alpha}{2} + x)$$

ou, equivalentemente,

$$\cos(\frac{\alpha}{2} - x) - \cos(\frac{\alpha}{2} + x) = \cos(\frac{\alpha}{2} + x) - \cos(\frac{3\alpha}{2} - x).$$

Agora podemos transformar estas diferenças em produtos usando o Facto **??**:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin x = \sin\alpha\sin(\frac{\alpha}{2} - x)$$

o que, usando, mais uma vez $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, equivale a

$$\sin x = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\alpha}{2} - x).$$

Estamos quase: vamos agora transformar o produto do lado direito numa soma usando o Facto **??**. Obtemos

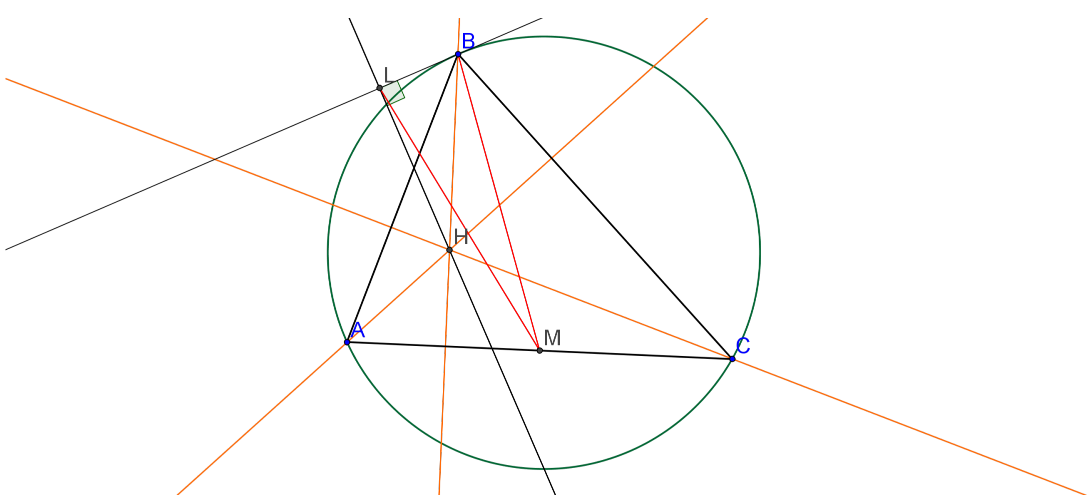
$$\sin x = \sin(\alpha - x) - \sin x$$

e isto é equivalente a (**??**), como pretendido, e isto conclui o problema! $\square$

3.2.2 Projecções ortogonais

A ideia que vamos apresentar agora é um pouco mais subtil. Por vezes, criar projecções ortogonais ajuda a fazer trigonometria. Vamos ver um exemplo.

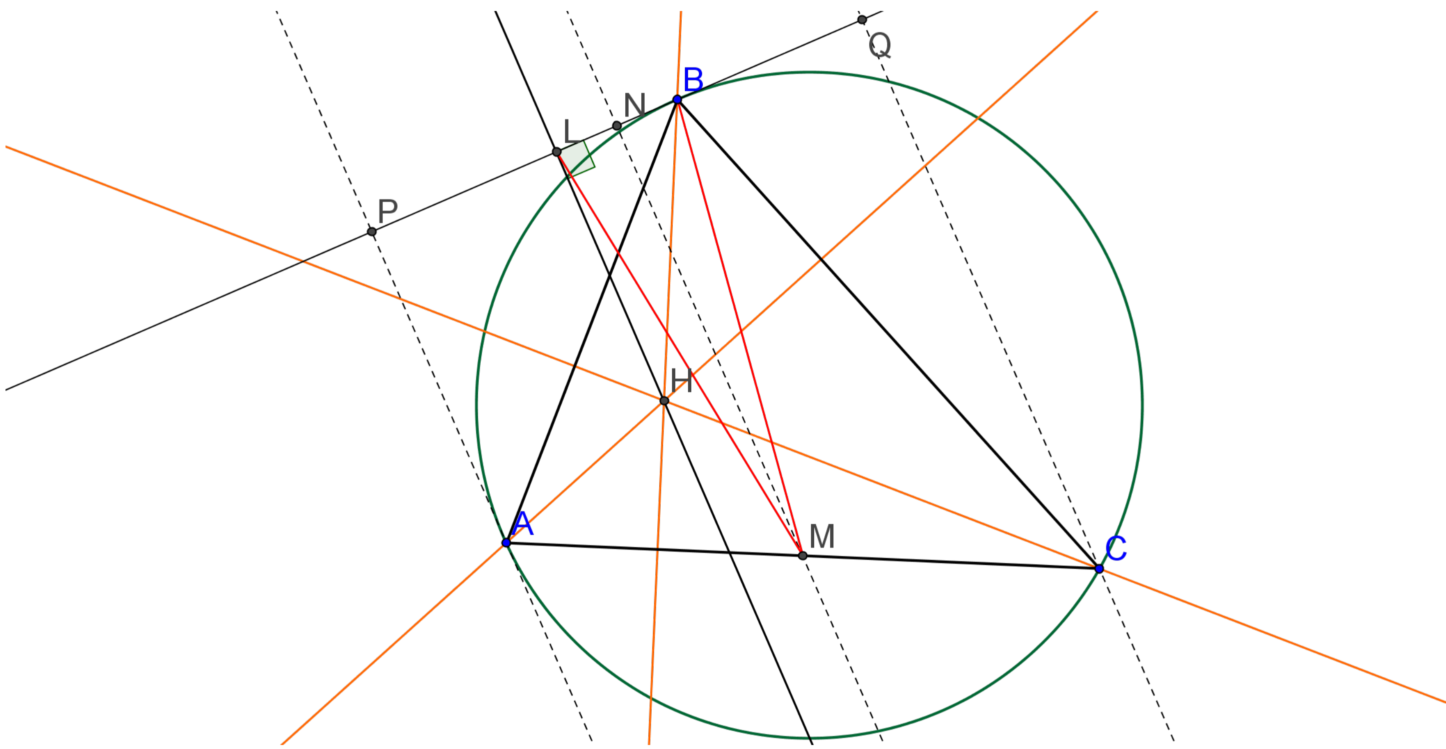
Problema 28 (São Petersburgo)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com ortocentro H. Seja L a projecção ortogonal de H sobre a recta tangente em B à circunferência circunscrita a $[ABC]$. Se M é o ponto médio de $[AC]$, prova que $\overline{MB} = \overline{ML}$.*



Solução. A princípio, trigonometria parece condenada a falhar. Não há uma forma realmente agradável de calcular $\overline{BM}$ com trigonometria, e muito menos $\overline{LM}$. Truque da cotangente nos ângulos $L\widehat{B}M$ e $M\widehat{L}B$? A ideia chega a causar dores de estômago, de tão arrepiante.

Por outro lado, criando algumas projecções ortogonais tudo fica muito mais agradável! Seja N a projecção ortogonal de N sobre BL. Então queremos provar que $\overline{NB} = \overline{NL}$.

Isto pode continuar a não parecer fácil, mas note-se que sabemos algo sobre a "posição" de N na recta BL. De facto, sejam P e Q as projecções ortogonais de A e C, respectivamente, sobre BL. Então N é o ponto médio de $[PQ]$; logo, queremos provar que os segmentos $[PQ]$ e $[BL]$ têm o mesmo ponto médio. Isto é equivalente a provar que $\overline{PL} = \overline{BQ}$, e, agora, tudo parece surpreendentemente mais agradável de calcular.



Começamos com a já habitual suposição de que o circunraio de $[ABC]$ é $\frac{1}{2}$. Por Arco Capaz degenerado, $C\widehat{B}Q = \alpha$, logo $\overline{BQ} = \overline{BC}\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$.

Além disso, temos $\overline{PL} = \overline{BP} - \overline{BL}$. Ora, por Arco Capaz degenerado, $P\widehat{B}A = \gamma$, logo $\overline{BP} = \sin\gamma\cos\gamma$. Por fim, $L\widehat{B}H = L\widehat{B}A + A\widehat{B}H = \gamma + (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \gamma$. Assim, como $\overline{BH} = \cos\beta$ (ver Apêndice **??**), temos $\overline{BL} = \cos\beta\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha + \gamma) = \cos\beta\sin(\alpha - \gamma)$. Assim, a Identidade que temos de provar é

$$\sin\alpha\cos\alpha = \sin\gamma\cos\gamma - \cos\beta\sin(\alpha - \gamma).$$

Transformando o produto $\cos\beta\sin(\alpha - \gamma)$ usando o Facto **??**, obtemos

$$\cos\beta\sin(\alpha-\gamma) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta-\gamma)) = \frac{1}{2}\sin(\pi-2\gamma)+\sin(2\alpha-\pi)) = \frac{1}{2}(\sin 2\gamma-\sin 2\alpha)$$

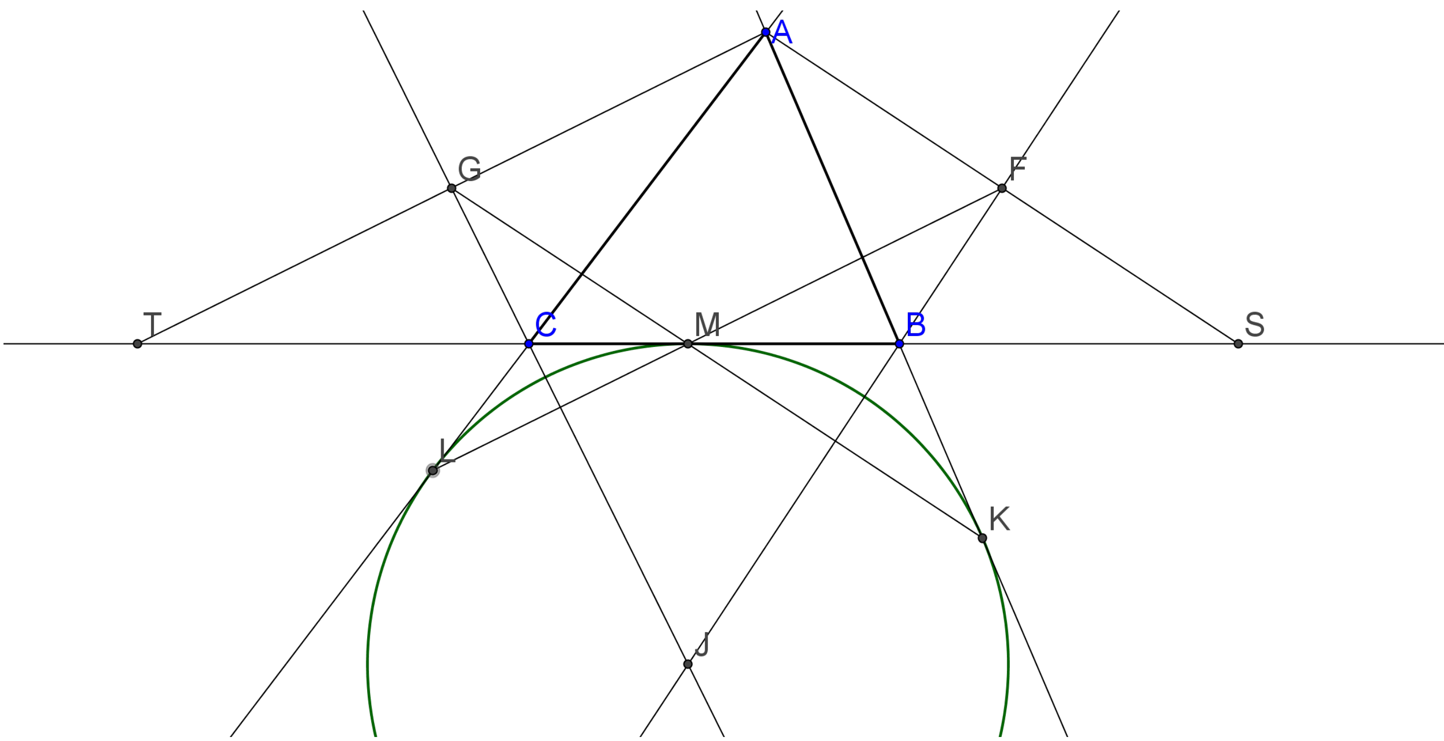
e assim queremos provar que

$$\sin\alpha\cos\alpha = \sin\gamma\cos\gamma + \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\gamma).$$

Notando que $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ e $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$, o resultado segue. □

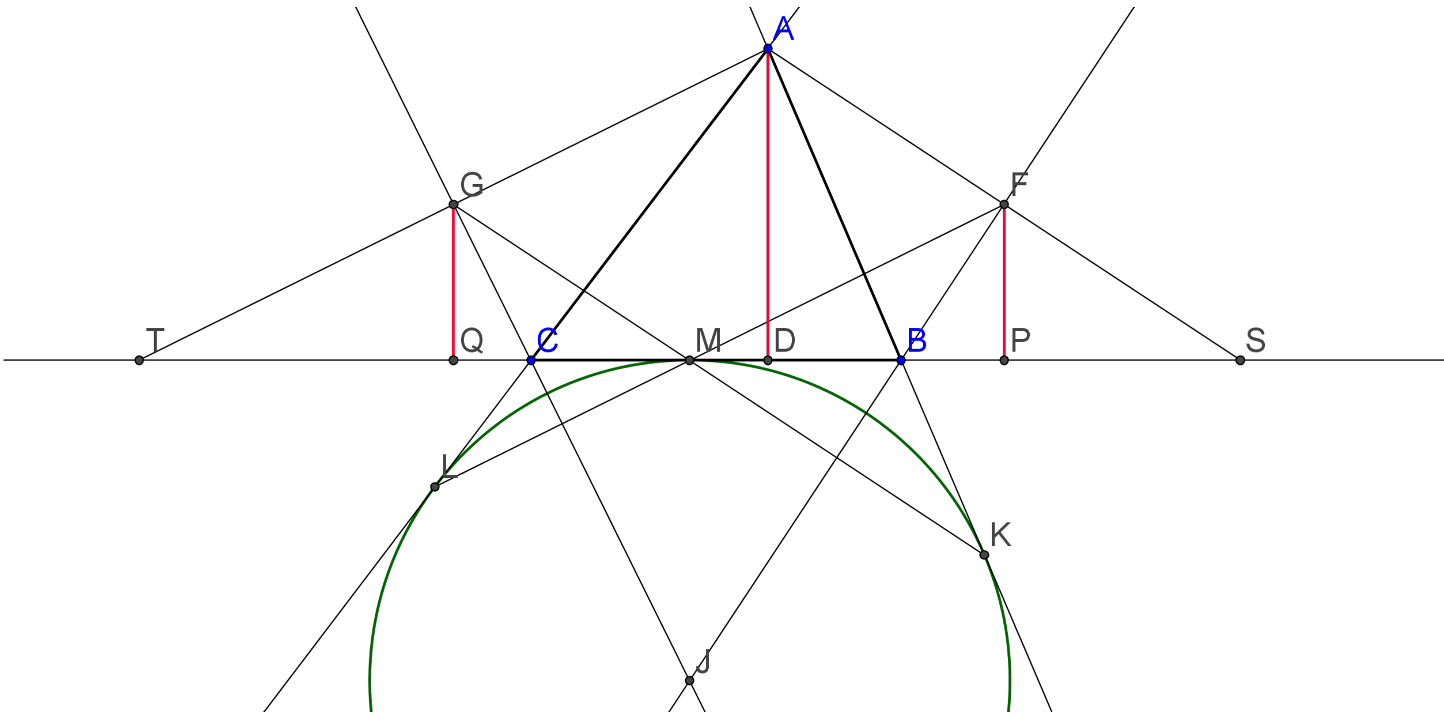
O próximo exemplo é um problema das IMO. Pedimos desculpa aos leitores que ainda não o resolveram por estar a "spoilar" para um tal problema; de qualquer modo, não é realmente essencial ler a solução, que é apenas mais uma aplicação deste tipo de ideias.

Problema 29 (IMO 2012)**.** *Dado um triângulo $[ABC]$, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita é tangente ao lado $[BC]$ em M, e às rectas AB e AC em K e L, respectivamente. As rectas LM e BJ intersectam-se em F, e as rectas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de intersecção das rectas AF e BC, e seja T o ponto de intersecção das rectas AG e BC. Prova que M é o ponto médio de $[ST]$.*



Solução. Mais um problema que, a princípio, parece pouco atacável com trigonometria: os ângulos que as rectas AF e AG não parecem à primeira vista calculáveis, e isso torna complicado calcular $\overline{MS}$ e $\overline{MT}$.

Vamos então fazer projecções ortogonais. Seja D o pé da altura relativo a A, e sejam P e Q as projecções ortogonais de F e G, respectivamente, sobre BC.



Isto é útil? Claro! Os comprimentos $\overline{AD}$ e $\overline{FP}$ calculam-se bem, assim como $\overline{MP}$; e depois, usando a razão de semelhança entre os triângulos $[SPF]$ e $[SDA]$, podemos calcular $\overline{SP}$. Depois teremos tudo aquilo de que precisamos para calcular $\overline{MS}$, pois sabemos $\overline{MB}$ ($\overline{MB} = s - c$ onde s é o semiperímetro de $[ABC]$) e facilmente calculamos $\overline{BP}$. $\overline{MT}$ calcula-se de maneira análoga.

Vamos passar à prática. Para começar, suponhamos que o circunraio de $[ABC]$ é $\frac{1}{2}$. Então $\overline{AD} = c \sin\beta = \sin\beta \sin\gamma$. O comprimento $\overline{MB}$ é dado por

$$s - c = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

(ver Apêndice **??**). Podemos calcular os ângulos de $[MFB]$: temos $B\widehat{M}F = C\widehat{M}L = \frac{\gamma}{2}$ (pois $\overline{CM} = \overline{CL}$ e $L\widehat{C}M = \pi - \gamma$). Além disso, $F\widehat{B}M = \pi - M\widehat{B}J = \pi - \frac{\pi-\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}$. Por fim, $M\widehat{F}B = \pi - \frac{\gamma}{2} - (\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}) = \frac{\pi-\gamma-\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Pela Lei dos Senos no triângulo $[MFB]$,

$$\frac{\overline{BF}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\overline{MB}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\overline{BF} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma\sin\frac{\beta}{2}.$$

Por fim, podemos calcular $\overline{FP}$. Temos

$$\overline{FP} = \overline{BF}\sin(P\widehat{B}F) = \overline{BF}\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) = \overline{BF}\cos\frac{\beta}{2} = \sin\gamma\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{2}.$$

Para determinarmos a razão de semelhança entre os triângulos $[SPF]$ e $[SDA]$, calculemos $\overline{AD}$: temos $\overline{AD} = c\sin\beta = \sin\beta\sin\gamma$. Incrível, $\overline{AD} = 2\overline{FP}$! Isso torna as contas ainda mais simples: a razão de semelhança entre $[SPF]$ e $[SDA]$ é 2, e portanto $\overline{SP} = \overline{DP}$.

Agora já temos tudo aquilo de que precisamos. Temos $\overline{BD} = c\cos\beta = \cos\beta\sin\gamma$ e $\overline{BP} = \overline{BF}\cos(P\widehat{B}F) = \sin\gamma\sin\frac{\beta}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) = \sin\gamma\sin^2\frac{\beta}{2}$. Então

$$\overline{SP} = \overline{DP} = \overline{BD} + \overline{BP} = \cos\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$\begin{aligned}\overline{MS} = \overline{BP} + \overline{SP} + \overline{MB} &= \sin\gamma\sin^2\frac{\beta}{2} + (\cos\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin^2\frac{\beta}{2}) + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\\ &= 2\sin\gamma\sin^2\frac{\beta}{2} + \cos\beta\sin\gamma + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Podemos simplificar isto um pouco mais: usando $\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$, ficamos com

$$\begin{aligned}\overline{MS} &= \sin\gamma(2\sin^2\frac{\beta}{2} + 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1) + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\\ &= \sin\gamma + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\overline{MT} = \sin\beta + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

e portanto queremos provar que $\sin\gamma + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\beta + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, ou seja,

$$\sin\gamma - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right).$$

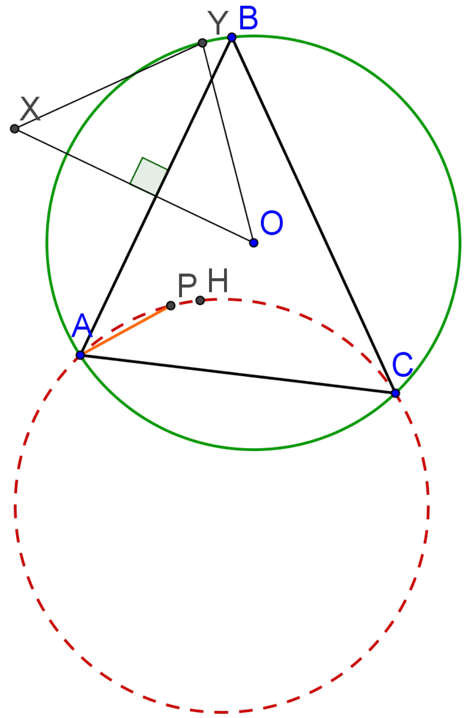
Transformando a diferença da esquerda em produto usando o Facto **??**, obtemos precisamente esta igualdade. Logo, o problema está terminado. □

Quanto ao exemplo que se segue, é razoável afirmar que a ideia principal não é usar projecções ortogonais. Mesmo assim, é um exemplo bastante interessante e a solução trigonométrica é razoavelmente não trivial.

Problema 30 (USAMO 2014)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com ortocentro H e seja P a segunda intersecção do circuncírculo do triângulo $[AHC]$ com a bissectriz interna de $\angle CAB$. Seja X o circuncentro do triângulo $[ABP]$ e seja Y o ortocentro do triângulo $[APC]$. Prova que o comprimento do segmento $[XY]$ é igual ao circunraio do triângulo $[ABC]$.*

Solução. Seja O o circuncentro de $[ABC]$. Vamos começar por fazer alguns avanços sintéticos. Para começar, afirmamos que Y pertence ao circuncírculo de $[ABC]$. É fácil provar que $A\widehat{H}C = \pi - A\widehat{B}C$, e do mesmo modo $A\widehat{Y}C = \pi - A\widehat{P}C$; ou seja, $A\widehat{Y}C = \pi - A\widehat{H}C = A\widehat{B}C$, logo A, B, C, Y são concíclicos, como pretendido.

Agora, aquilo que queremos provar parece ligeiramente menos rebuscado: queremos apenas provar que $\overline{XY} = \overline{OY}$. É natural tentar prová-lo apenas com angle-chasing; vamos parar um pouco para ver porque é que tal não corre bem.



É fácil calcular os ângulos que a recta OY faz com as "coisas conhecidas", como não é difícil ver, pois podemos calcular $B\widehat{O}Y$. Além disso, a recta OX também faz ângulos calculáveis: de facto, esta recta é a mediatriz de $[AB]$, logo é perpendicular a AB. Mas não há um bom motivo para conseguirmos calcular directamente os ângulos que a recta XY faz com o "resto"; estes pontos não estão ambos sobre uma recta agradável, nem têm uma relação interessante.

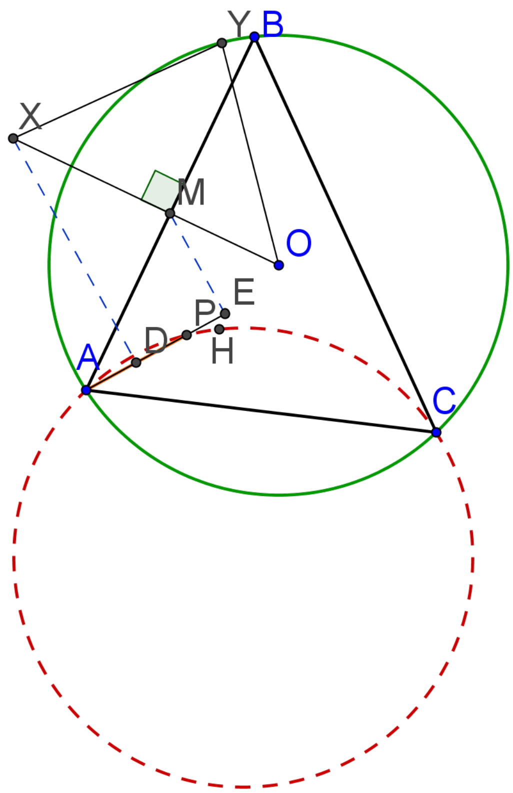
Mas, pelo que vimos, podemos calcular o ângulo $Y\widehat{O}X$: calculemo-lo. Temos $Y\widehat{O}X = B\widehat{O}A - B\widehat{O}Y = \frac{1}{2} \cdot B\widehat{O}A - 2 \cdot B\widehat{A}Y = \gamma - 2 \cdot B\widehat{A}Y$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} B\widehat{A}Y &= C\widehat{A}Y - \alpha \\ &= \frac{\pi}{2} - P\widehat{C}A - \alpha \\ &= \frac{\pi}{2} - (\beta - \frac{\alpha}{2}) - \alpha \\ &= \frac{\pi}{2} - \beta - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

A segunda igualdade vem do facto de que $CP \perp AY$; a terceira vem do facto de que $P\widehat{C}A = \pi - C\widehat{A}P - A\widehat{P}C = \pi - \frac{\alpha}{2} - (\pi - \beta) = \beta - \frac{\alpha}{2}$. Assim, temos

$$Y\widehat{O}X = \gamma - 2(\frac{\pi}{2} - \beta - \frac{\alpha}{2}) = \gamma + \alpha - \pi + 2\beta = \pi - \beta - \pi + 2\beta = \beta.$$

Então queremos provar que $O\widehat{X}Y = \beta$. Para o fazer, vamos provar que $[OX]$ tem o comprimento apropriado para que $O\widehat{X}Y = \beta$. Qual é esse comprimento? Sendo Y' a projecção ortogonal de Y sobre OX, queremos que Y' seja o ponto médio de $[OX]$; ou seja, queremos provar que $\overline{OX} = 2 \cdot \overline{OY'} = 2R\cos\beta = \cos\beta$, onde obviamente estamos a supor sem perda de generalidade que $R = \frac{1}{2}$. Então queremos apenas calcular $\overline{OX}$.



Seja M o ponto médio de $[AB]$. Calcular $\overline{OM}$ é fácil: como $O\widehat{A}B = \frac{\pi}{2} - \gamma$ (porquê?), temos $\overline{OM} = R\cos\gamma = \frac{1}{2}\cos\gamma$. Falta calcular $\overline{MX}$.

Podemos calcular $\overline{AP}$; além disso, X é a intersecção de OM com a mediatriz de $[AP]$. Como o ângulo entre AP e OM é calculável, é intuitivo que, sabendo a "posição" de P na bissectriz de $\angle CAB$, também podemos saber a "posição" de X na recta OM. Vamos ver como o fazer.

Seja D o ponto médio de $[AP]$, que é a projecção ortogonal de X sobre AP. Seja E a projecção ortogonal de M sobre AP. Então, como $E\widehat{A}M = \frac{\alpha}{2}$, $\overline{AE} = \overline{AM}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\gamma\cos\frac{\alpha}{2}}{2}$.

Observe-se que de $A\widehat{H}C = \pi - A\widehat{B}C$ decorre que os circuncírculos de $[ABC]$ e $[AHC]$ têm o mesmo raio (porquê), logo temos $\overline{AP} = 2R\sin(P\widehat{C}A) = \sin(\beta - \frac{\alpha}{2})$. Logo, $\overline{AD} = \frac{\sin(\beta-\frac{\alpha}{2})}{2}$ e portanto

$$\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD} = \frac{\sin\gamma\cos\frac{\alpha}{2} - \sin(\beta - \frac{\alpha}{2})}{2}.$$

Sabendo $\overline{DE}$, calculamos $\overline{XM}$: sendo K a projecção ortogonal de M sobre XD, temos $\overline{MK} = \overline{DE}$, e além disso $\overline{XM} = \frac{\overline{MK}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (repare-se que $X\widehat{M}K = \frac{\pi}{2} - K\widehat{A}M = \frac{\pi}{2} - E\widehat{A}M$). Logo, queremos provar que

$$\frac{\sin\gamma\cos\frac{\alpha}{2} - \sin(\beta - \frac{\alpha}{2})}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\gamma}{2} = \cos\beta.$$

Multiplicando por $2\sin\frac{\alpha}{2}$, vemos que isto é equivalente a

$$\sin\gamma\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\gamma\sin\frac{\alpha}{2}-\sin(\beta-\frac{\alpha}{2})=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta$$

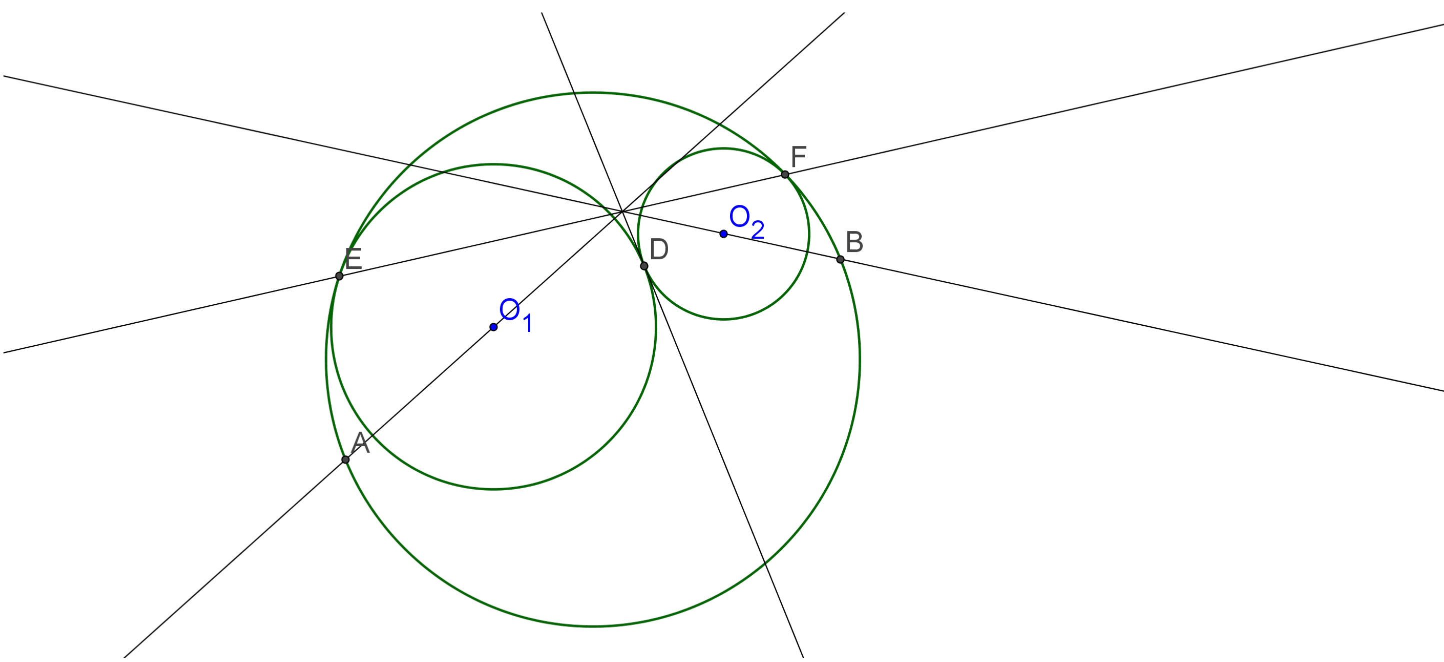
e podemos logo ver que $\sin\gamma\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\gamma\sin\frac{\alpha}{2}=\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})=\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})$ (note-se que $(\gamma+\frac{\alpha}{2})+(\beta+\frac{\alpha}{2})=\pi$). Assim, queremos provar que

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta=\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})-\sin(\beta-\frac{\alpha}{2})$$

e transformando o produto do lado esquerdo em soma usando o Facto **??**, obtemos precisamente esta identidade, logo o problema está concluído. $\square$

Vamos apresentar um último exemplo, um G6 da Shortlist. Este é um exemplo bastante instrutivo, pois o problema, à primeira vista, parece inatacável com trigonometria; mas, através de uma observação engenhosa e interessante, vai-se deixar vencer por estas técnicas. Apresentamos duas soluções: a primeira é menos elegante e mais "straightforward" mas exibe mais uma vez o poder das projecções ortogonais, enquanto a segunda é mais limpa e curta. Enfim, vamos ao problema.

Problema 31 (IMO Shortlist 2006)**.** *Circunferências ω_1 e ω_2, com centros O_1 e O_2 respectivamente, são externamente tangentes no ponto D e são internamente tangentes a uma circunferência ω nos pontos E e F, respectivamente. Seja t a recta tangente comum a ω_1 e ω_2 em D. Seja $[AB]$ o diâmetro de ω perpendicular a t, de tal maneira que A, E e O_1 estão no mesmo semiplano definido por t. Prova que as quatro rectas AO_1, BO_2, EF e t são concorrentes.*

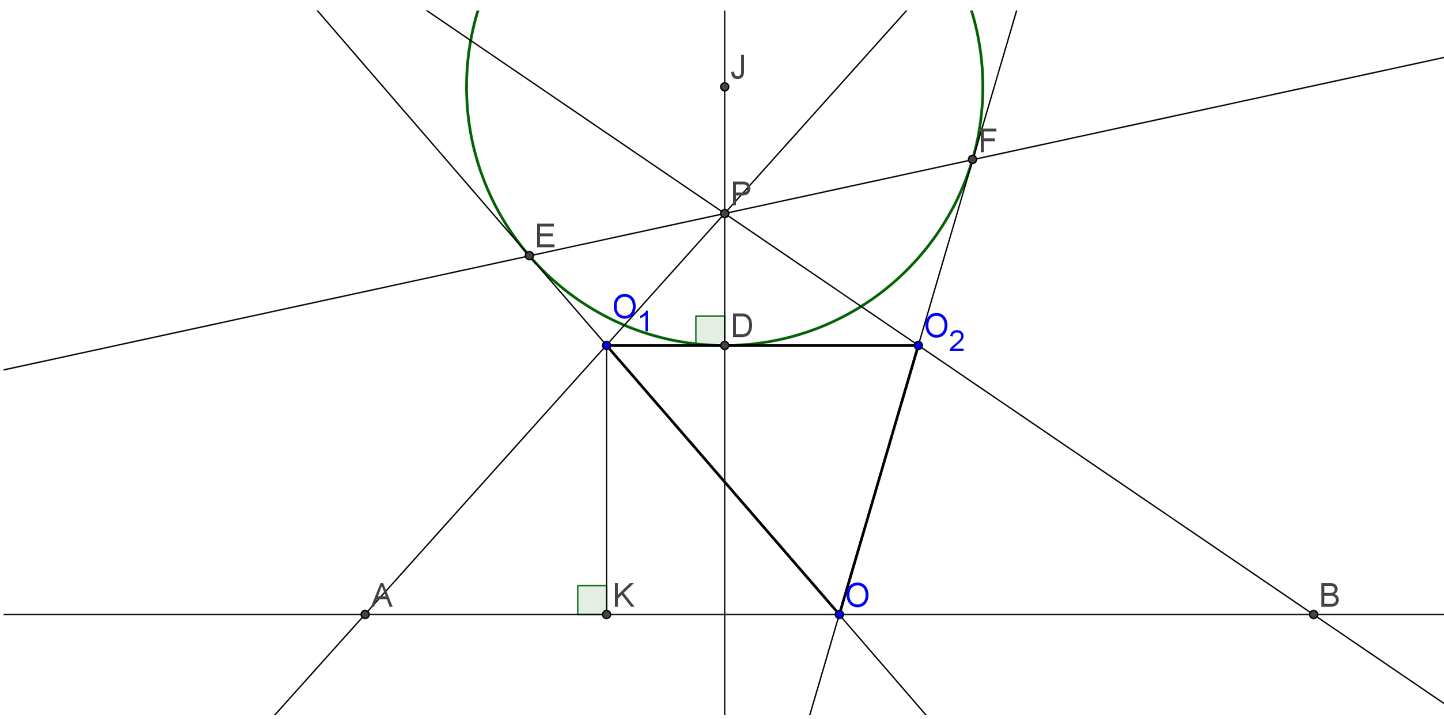


Solução. Que problema com aspecto menos atacável com trigonometria! Existe mesmo uma solução com trigonometria para isto? Como?

Vamos começar por fazer algumas observações "triviais". Seja O o centro de ω. Então O, O_1 e E são colineares, bem como O, O_2 e F. Além disso, temos as igualdades $\overline{OE} = \overline{OF}$, $\overline{O_1D} = \overline{O_1E}$ e $\overline{O_2D} = \overline{O_2F}$. Mas afinal para que servem estas igualdades triviais?

Elas são bastante sugestivas: fazem lembrar qualquer coisa! De facto, os pontos de tangência do excírculo do triângulo $[OO_1O_2]$ oposto a O com os lados desse triângulo satisfazem estas igualdades. Mais, eles são os únicos pontos (considerando E no prolongamento de $[OO_1]$ no sentido de O para O_1 e F no prolongamento de $[OO_2]$ no sentido de O para O_2) que satisfazem estas igualdades. Então D, E e F são os pontos de tangência do O-excírculo desse triângulo!

Este facto é interessante, mas para que nos é útil? Porque agora podemos reformular o problema todo em termos do triângulo $[OO_1O_2]$. Já sabemos "o que são" D, E, F; t é simplesmente a recta JD onde J é o O-excentro. E A e B? Na realidade só nos precisamos de preocupar com A, já que por simetria é suficiente provar que as rectas AO_1, EF e t concorrem. E A é simplesmente o ponto na paralela a O_1O_2 por O tal que $\overline{OA} = \overline{OE}$ e que está no semiplano definido por t que contém E. Reduzimos o problema a um clássico problema de triângulo; o "nosso triângulo" (aquele que tem circunraio $\frac{1}{2}$!) é o triângulo $[OO_1O_2]$.



Então sejam $\alpha = O_2\widehat{O}O_1$, $\beta = O\widehat{O_1}O_2$ e $\gamma = O_1\widehat{O_2}O$, e sejam $a = \overline{O_1O_2}$, $b = \overline{OO_2}$ e $c = \overline{OO_1}$. Sem perda de generalidade, o circunraio de $[OO_1O_2]$ é $\frac{1}{2}$. Seja P o ponto de intersecção de JD

e EF, e seja P' o ponto de intersecção de AO_1 e JD. Queremos provar que $P = P'$; para tal é suficiente provar que $\overline{DP} = \overline{DP'}$.

Os ângulos que envolvem a recta O_1 não são directamente calculáveis, e isto pode fazer parecer a nossa tarefa difícil. Então seja K a projecção ortogonal de O_1 sobre AB. Os triângulos $[P'DO_1]$ e $[O_1KA]$ são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{DP'}}{\overline{DO_1}} = \frac{\overline{KO_1}}{\overline{KA}}.$$

Assim, queremos simplesmente provar que

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{DO_1}} = \frac{\overline{KO_1}}{\overline{KA}}.$$

Vamos fazer angle-chasing: temos $D\widehat{O_1}E = \pi - \beta$ e $\overline{O_1D} = \overline{O_1E}$, logo $O_1\widehat{E}D = \frac{\beta}{2}$. Além disso, como $\overline{OE} = \overline{OF}$, $O\widehat{E}F = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Logo, $D\widehat{E}P = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$. Por fim, $P\widehat{D}E = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$ e portanto $E\widehat{P}D = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Portanto,

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{DO_1}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{DO_1}} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2})} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2})}$$

(aqui usámos $\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}) = \cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2})$, e $\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$).

Temos $\overline{KO_1} = c\sin\beta = \sin\beta\sin\gamma$. Por outro lado, $\overline{KA} = \overline{OA} - \overline{OK} = \overline{OE} - \overline{OK} = s - \overline{OK} = s - \cos\beta\sin\gamma$, onde s é o semiperímetro do triângulo $[OO_1O_2]$. Já sabemos que

$$s = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \text{ (ver Apêndice \textbf{??})}$$

e portanto $\overline{KA} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\beta\sin\gamma$. Aquilo que queremos provar, assim, é

$$\frac{2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2})} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\beta\sin\gamma}.$$

Podemos logo ver que algumas coisas cortam no numerador: de facto, escrevendo $\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ e $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, podemos cancelar os factores $\cos\frac{\beta}{2}$ e $\sin\frac{\gamma}{2}$. Aquilo que queremos provar fica

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\beta\sin\gamma = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}).$$

Ainda podemos cortar mais: escrevendo novamente $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ e cancelando $2\cos\frac{\gamma}{2}$ dos dois lados, ficamos com

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\cos\beta = \sin\frac{\beta}{2}\cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2})$$

o que fica, após escrever $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}) = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}$, $\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$ e $\cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}) = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$,

$$\cos\frac{\beta}{2}(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2})-\sin\frac{\gamma}{2}(2\cos^2\frac{\beta}{2}-1)=\sin\frac{\beta}{2}(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2})$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}(1-\cos^2\frac{\beta}{2})=\sin\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$$

e isto é obviamente verdade, logo o problema está terminado. □

Segunda solução. Vamos agora mostrar uma abordagem um pouco mais elegante. O que nós queremos provar é que $D\widehat{O_1}P = O\widehat{A}O_1$, ou, equivalentemente, $P\widehat{O_1}E = A\widehat{O_1}D$. Note-se que a soma destas igualdades é trivialmente verdadeira: $D\widehat{O_1}P + P\widehat{O_1}E = D\widehat{O_1}E = \pi - O\widehat{O_1}O_2 = \pi - O_1\widehat{O}A = O\widehat{A}O_1 + A\widehat{O_1}O$. Logo, pelo Lema **??**, basta provar que

$$\frac{\sin(D\widehat{O_1}P)}{\sin(P\widehat{O_1}E)} = \frac{\sin(O\widehat{A}O_1)}{\sin(A\widehat{O_1}O)}. \tag{3}$$

O lado direito é simplesmente igual a

$$\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OA}} = \frac{c}{s} = \frac{\sin\gamma}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

O lado esquerdo é igual a

$$\frac{\left(\frac{\sin(D\widehat{O_1}P)}{\overline{DP}}\right)}{\left(\frac{\sin(P\widehat{O_1}E)}{\overline{PE}}\right)} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PE}} = \frac{\left(\frac{1}{\overline{PO_1}}\right)}{\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})}{\overline{PO_1}}\right)} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{PE}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2})} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

(aqui utilizámos o angle-chasing feito anteriormente). Assim, obtivemos (**??**), e o problema terminou pela segunda vez. □

3.3 Problemas propostos

Vamos agora apresentar problemas que podem ser resolvidos com trigonometria.

Problema 32. *Seja $[ABC]$ um triângulo cujo incírculo tem centro I e é tangente aos lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$ nos pontos D, E e F, respectivamente. Seja M o ponto médio do lado $[BC]$. Prova que AM, ID e EF são concorrentes.*

Problema 33 (IMO Shortlist 2008)**.** *No triângulo $[ABC]$, sejam E e F os pés das alturas relativas a B e C, respectivamente. Duas circunferências que passam por A e F são tangentes à recta BC nos pontos P e Q, respectivamente. Prova que as rectas BE e CF se intersectam sobre a circunferência circunscrita ao triângulo $[AEF]$.*

Problema 34 (Zhautykov 2008)**.** *Os pontos K, L, M, N são respectivamente os pontos médios dos lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[DA]$ do quadrilátero $[ABCD]$. A recta KM intersecta as diagonais AC e BD nos pontos P e Q, respectivamente. A recta LN intersecta as rectas AC e BD nos pontos R e S, respectivamente. Se $\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{BQ} \cdot \overline{QD}$, prova que $\overline{AR} \cdot \overline{RC} = \overline{BS} \cdot \overline{SD}$.*

Problema 35 (Centroamericanas 2009)**.** *Dado um triângulo acutângulo e escaleno $[ABC]$, sejam H o seu ortocentro, O o seu circuncentro, E e F os pés das alturas relativamente a B e C respectivamente. A recta AO intersecta outra vez o circuncírculo do triângulo no ponto G e os segmentos $[FE]$ e $[BC]$ nos pontos X e Y, respectivamente. Seja Z o ponto de intersecção da recta AH com a recta tangente ao circuncírculo de $[ABC]$ em G. Prova que HX é paralela a YZ.*

Problema 36 (USAMO 1999)**.** *Seja $[ABCD]$ um trapézio com AB paralela a CD. A circunferência inscrita no triângulo $[BCD]$ é tangente a CD em E. Seja F um ponto na bissectriz interna do ângulo $\angle DAC$, tal que $EF \perp CD$. A circunferência circunscrita ao triângulo $[ACF]$ intersecta a recta CD em C e G. Prova que o triângulo $[AFG]$ é isósceles.*

Problema 37 (IMO Shortlist 2006)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com $B\widehat{C}A < C\widehat{A}B < \frac{\pi}{2}$. Seja D o ponto em $[AC]$, diferente de A, tal que $\overline{BD} = \overline{BA}$. O incírculo de $[ABC]$ é tangente a $[AB]$ em K e a $[AC]$ em L. Seja J o incentro do triângulo $[BCD]$. Prova que a recta KL intersecta o segmento $[AJ]$ no seu ponto médio.*

Problema 38 (TST EUA 2006)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo. Exteriormente ao triângulo constroem-se triângulos $[PAB]$ e $[QAC]$ tais que $\overline{AP} = \overline{AB}$, $\overline{AQ} = \overline{AC}$ e $B\widehat{A}P = C\widehat{A}Q$. Os segmentos $[BP]$ e $[CQ]$ intersectam-se em R. Seja O o circuncentro do triângulo $[BCR]$. Prova que $AO \perp PQ$.*

Problema 39 (IMO 2014)**.** *Os pontos P e Q encontram-se sobre o lado $[BC]$ de um triângulo acutângulo $[ABC]$ de modo que $P\widehat{A}B = B\widehat{C}A$ e $C\widehat{A}Q = A\widehat{B}C$. Os pontos M e N encontram-se sobre as rectas AP e AQ, respectivamente, de modo que P é o ponto médio de $[AM]$ e Q é o ponto médio de $[AN]$. Prova que as rectas BM e CN se intersectam sobre a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.*

Problema 40 (IMO 2007). *Sejam A, B, C, D e E pontos tais que $[ABCD]$ é um paralelogramo e $[BCED]$ é um quadrilátero cíclico. Seja l uma recta que passa por A. A recta l intersecta o interior do segmento $[DC]$ em F e a recta BC em G. Suponhamos que $\overline{EF} = \overline{EG} = \overline{EC}$. Prova que l é a bissectriz do ângulo $\angle DAB$.*

Problema 41 (IMO 2007). *No triângulo $[ABC]$, a bissectriz do ângulo $\angle BCA$ intersecta a circunferência circunscrita no ponto $R \neq C$, intersecta a mediatriz de $[BC]$ em P e intersecta a mediatriz de $[AC]$ em Q. Sejam K e L os pontos médios de $[BC]$ e $[AC]$, respectivamente. Prova que os triângulos $[RPK]$ e $[RQL]$ têm a mesma área.*

4 Métrica

Não, não vamos falar de poesia. Esta secção vai servir de "complemento" à secção de Trigonometria, procurando mostrar como abordar problemas em que tudo se torna mais agradável quando colocado em função de comprimentos e não de razões trigonométricas de ângulos. Vamos fazer menos angle-chasing e trabalhar menos com o α, o β e o γ, e mais com o a, o b e o c.

No entanto, evitar por completo os ângulos não é realmente exequível; simplesmente, ao invés da sagrada Lei dos Senos que nos acompanhou ao longo da secção anterior, desta vez vamos recorrer principalmente à Lei dos Cossenos, que nos permite transformar igualdades de ângulos em relações métricas, i. e., de comprimentos.

4.1 Alguma artilharia

Vamos trabalhar com comprimentos. Logo, não é mau termos à disposição alguns teoremas que relacionam comprimentos.

Para começar, introduziremos (deixando as provas como exercício para o leitor) os clássicos Teoremas de Menelaus e Ceva:

Teorema 4.1 (Teorema de Menelaus)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo e sejam X, Y, Z pontos nas rectas BC, AC e AB, respectivamente. Então X, Y e Z são colineares se e só se*

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = -1.$$

(Aqui, os comprimentos são orientados.)

Vamos parar um pouco para perceber o poder deste Teorema. É claro que ele nos fornece um excelente e simétrico critério de colineariedade, o que pode ser muito útil (é bastante propício a utilizações da Lei dos Senos, dado o aparecimento de razões de comprimentos), mas, para quem está disposto a fazer brute force, a sua principal força pode estar na outra implicação. Se soubermos as "posições" de X e Y nas rectas BC e AC, respectivamente, ou seja, se soubermos os comprimentos $\overrightarrow{BX}$, $\overrightarrow{CX}$ (sim, claro que saber um implica saber o outro), $\overrightarrow{CY}$, $\overrightarrow{YA}$, então podemos determinar $\overrightarrow{AZ}$ e $\overrightarrow{ZB}$ (sabemos o seu quociente e a sua soma, e portanto temos uma equação do primeiro grau em cada um). E tudo em função de comprimentos, sem precisarmos de recorrer à Trigonometria!

Tanto no uso deste Teorema como do próximo, vamos ser muitas vezes (sempre?) preguiçosos e dispensar o uso de comprimentos orientados.

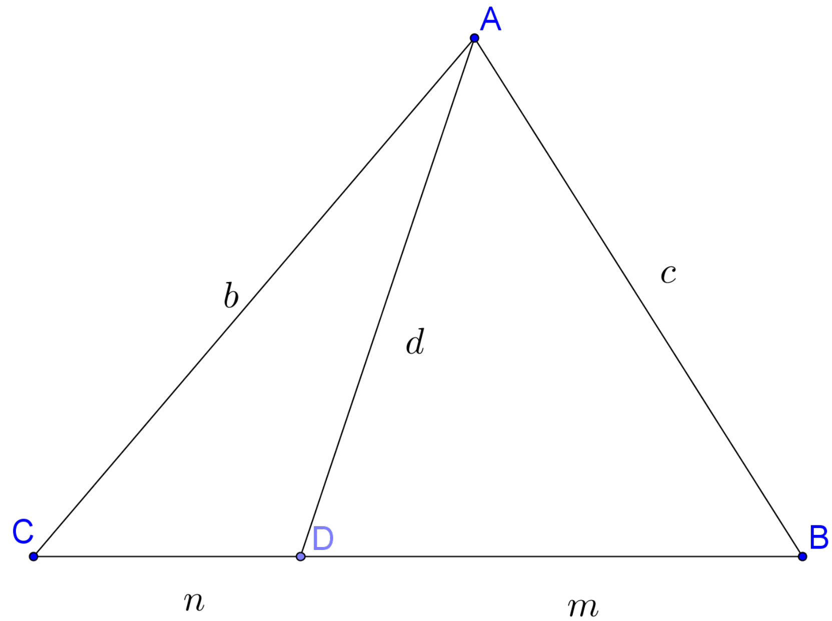
Teorema 4.2 (Teorema de Ceva)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo e sejam X, Y, Z pontos nas rectas BC, AC e AB, respectivamente. Então AX, BY e CZ são concorrentes se e só se*

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1.$$

Agora, vamos recordar/introduzir um Teorema um pouco mais feio: o Teorema de Stewart.

Teorema 4.3 (Teorema de Stewart)**.** *Seja* $[ABC]$ *um triângulo e* D *um ponto no lado* $[BC]$*. Como habitual, sejam* $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ *e* $c = \overline{AB}$, *e sejam* $d = \overline{AD}$, $m = \overline{BD}$ *e* $n = \overline{CD}$*. Então tem-se*

$$b^2m + c^2n = ad^2 + amn.$$



Mais uma vez, não provaremos aqui este Teorema[4]; a prova fica como exercício para o leitor, e este exercício será fácil com a Lei dos Cossenos, que abordaremos mais à frente. (Esta relação resulta de expressar a igualdade $\cos(B\widehat{D}A) = -\cos(A\widehat{D}B)$ com a Lei dos Cossenos).

Com este Teorema, temos uma forma (se bem que pouco agradável) de exprimir d em função dos lados do triângulo e de m e n. Vale talvez a pena dar ênfase ao caso em que D é o ponto médio de $[BC]$. Nesse caso, $m = n = \frac{a}{2}$ e obtemos o seguinte

Lema 4.4 (Comprimento da mediana)**.** *Se* M *é o ponto médio do lado* $[BC]$*, então*

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

Este caso particular é particularmente útil e será o mais vezes usado.

[4] A igualdade pode ser escrita na forma $bmb + cnc = dad + man$. Por este motivo, é habitual este resultado ser conhecido pela mnemónica *bomb cinc dad man*.

4.2 Brincando com a Lei dos Cossenos

Enquanto a Lei dos Senos nos acompanhou sempre que trabalhámos com Trigonometria, a Lei dos Cossenos estará sempre connosco quando precisarmos de envolver ângulos numa solução com Métrica. Ressaltamos que, dado um triângulo $[ABC]$, usamos a convenção usual $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $\alpha = C\widehat{A}B$, $\beta = A\widehat{B}C$, $\gamma = A\widehat{B}C$.

Teorema 4.5 (Lei dos Cossenos)**.** *No triângulo* $[ABC]$*,*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Demonstração. Seja D o pé da altura relativa a A. Então, por trigonometria básica, $\overline{AD} = b\sin\gamma$ e $\overline{CD} = b\cos\gamma$, logo $\overline{BD} = a - b\cos\gamma$. Logo, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo $[ABD]$,

$$c^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2 = a^2 + b^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

como pretendido. $\square$

Porque é que este Teorema será tão importante para nós? De certo modo, quando usamos Métrica o nosso objectivo é, precisamente, evitar a Trigonometria; isto é bom em situações que, com trigonometria pura, nos levariam a identidades demasiado feias, por exemplo. Ora este Teorema faz precisamente o que queremos: como a equação apresentada se pode escrever como

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

temos uma forma agradável de converter cossenos de ângulos em expressões métricas!

Vamos, como pré-exemplo, demonstrar o Teorema de Stewart. Observe-se o desenho da página anterior: como $\cos(B\widehat{D}A) = -\cos(A\widehat{D}B)$, temos

$$\frac{d^2 + m^2 - c^2}{2dm} = -\frac{d^2 + n^2 - b^2}{2dn}$$

e isto equivale ao Teorema de Stewart.

Antes de começarmos a destruir problemas, vamos aproveitar a introdução do Teorema dos Cossenos para mostrar alguns exemplos de distâncias num triângulo que são particularmente agradáveis de exprimir em termos dos lados.

4.2.1 Algumas distâncias particularmente agradáveis

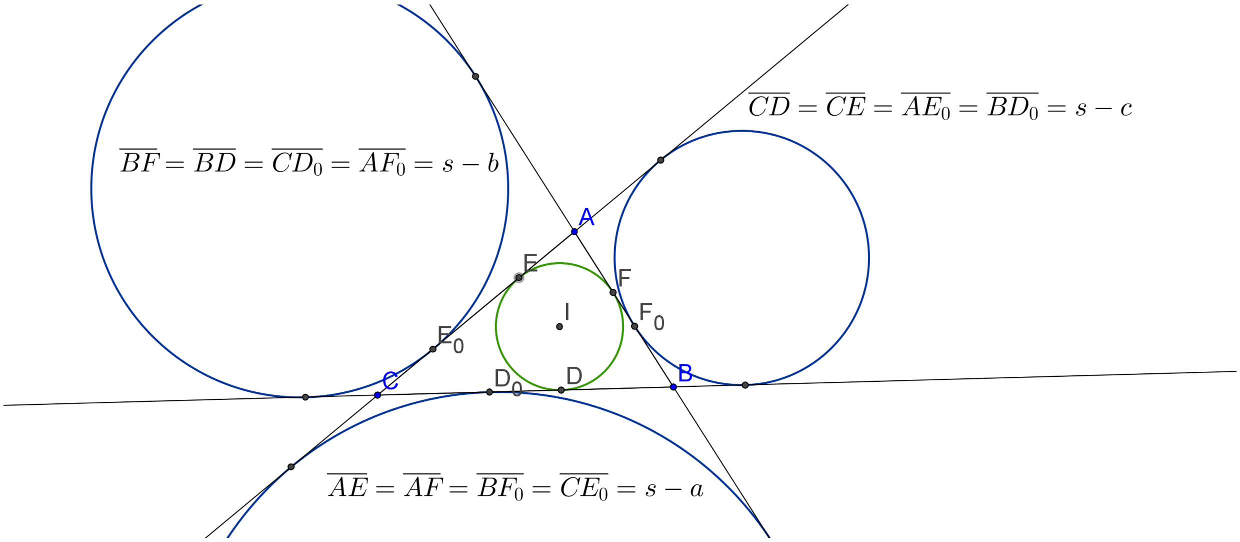
Vamos listar algumas delas.

- As distâncias aos **pés das bissectrizes**. Sendo D o ponto de intersecção da A-bissectriz com o lado $[BC]$, pelo Teorema da Bissectriz tem-se

  $$\frac{\overline{BD}}{a - \overline{BD}} = \frac{c}{b}$$

  e daqui obtemos $\overline{BD} = \frac{ac}{b+c}$. As outras distâncias são análogas.

- As distâncias aos **pontos de tangência do incírculo e dos excírculos**. Nunca é demais recordar as igualdades da figura.

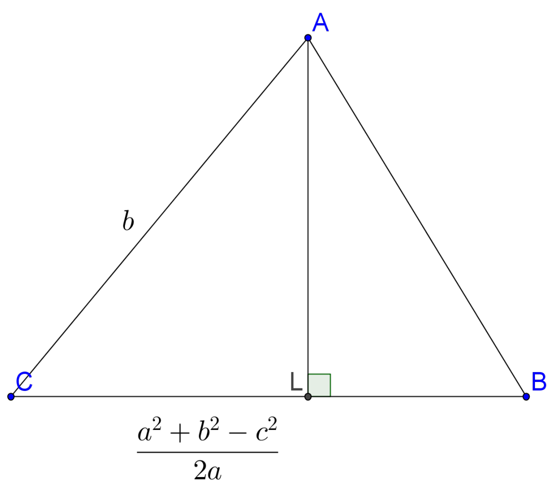


(Aqui, como habitual, $s = \frac{a+b+c}{2}$).

- As distâncias aos **pés das alturas**. Esta é talvez a parte mais surpreendente. Seja L o pé da altura relativa a A. Então temos

$$\overline{CL} = b\cos\gamma = b \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a},$$

uma expressão bastante satisfatória!



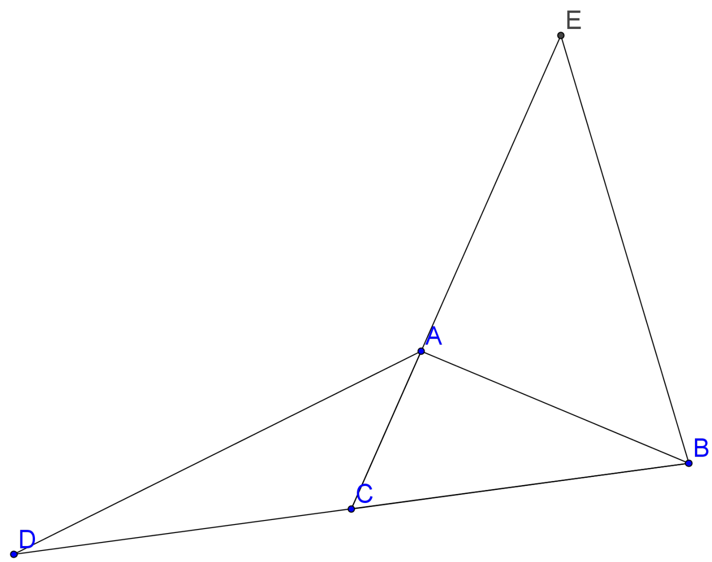
Já vimos ideias gerais suficientes, portanto, vamos passar à acção e atacar problemas com Métrica.

4.2.2 Um pouco de acção

O nosso primeiro exemplo será um problema para meninas.

Problema 42 (EGMO[5] 2013)**.** *No triângulo* $[ABC]$*, seja* D *um ponto no prolongamento do lado* $[BC]$ *no sentido de* B *para* C *tal que* $\overline{CD} = \overline{BC}$*. Seja* E *um ponto no prolongamento do lado* $[AC]$ *no sentido de* C *para* A *tal que* $\overline{AE} = 2\overline{CA}$*. Se* $\overline{AD} = \overline{BE}$*, prova que o triângulo* $[ABC]$ *é rectângulo.*

Solução. Trigonometria (pura) não parece boa ideia; $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ não se calculam particularmente bem com a Lei dos Senos. Por outro lado, o problema é perfeito para se resolver com Métrica.



Queremos calcular $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ em função dos lados do triângulo. Para calcular $\overline{AD}$, usamos a Lei dos Cossenos no triângulo $[ACD]$; conhecemos $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$, e podemos determinar $\cos(A\widehat{C}D) = -\cos\gamma$! E podemos calcular $\overline{BE}$ de maneira análoga. Vamos a isso: temos

$$\cos(A\widehat{C}B) = -\cos\gamma = -\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

e portanto

$$\overline{AD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \left(-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

(Sim, os denominadores até cortam e tudo!)

[5]European Girls Mathematical Olympiad.

Agora vamos a $\overline{BE}$. Temos $\cos(B\widehat{A}E) = -\cos(C\widehat{A}B) = -\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, logo

$$\overline{BE}^2 = (2b)^2 + c^2 - 2 \cdot 2b \cdot c \cdot \left(-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = -2a^2 + 6b^2 + 3c^2.$$

Então,

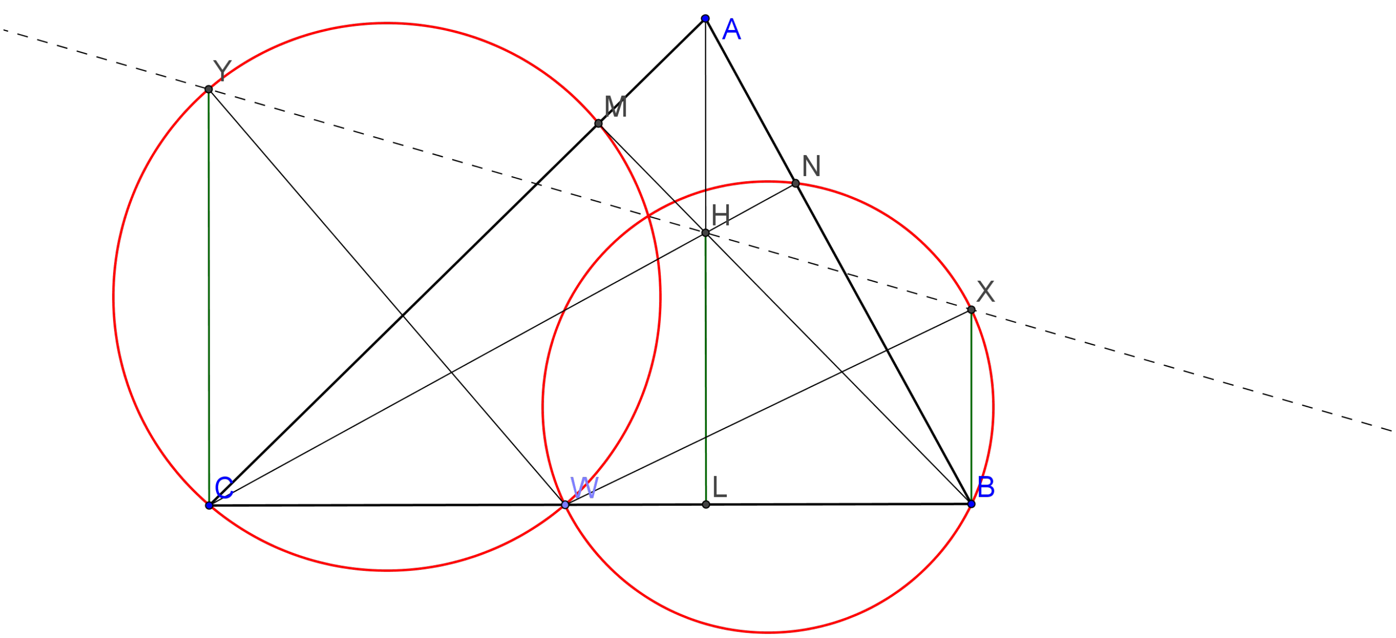
$$\begin{aligned} \overline{AD} = \overline{BE} &\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - c^2 = -2a^2 + 6b^2 + 3c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \end{aligned}$$

e isto, pelo Teorema de Pitágoras, implica que $[ABC]$ seja rectângulo em A, concluindo o problema! $\square$

Este foi um exemplo "standard", na medida em que só usámos as ideias mais básicas da Métrica. O próximo exemplo será ligeiramente mais avançado.

Problema 43 (IMO 2013)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo com ortocentro H, e seja W um ponto no lado $[BC]$, estritamente entre B e C. Os pontos M e N são os pés das alturas traçadas desde B e C, respectivamente. Denotamos por ω_1 a circunferência circunscrita ao triângulo $[BWN]$; seja X o ponto tal que $[WX]$ é um diâmetro de ω_1. Denotamos por ω_2 a circunferência circunscrita ao triângulo $[CWM]$; seja Y o ponto tal que $[WY]$ é um diâmetro de ω_2. Demonstra que X, Y e H são colineares.*

Solução. Mais uma vez, Trigonometria é uma ideia bastante pouco convidativa, talvez pela falta de possibilidades de angle-chasing. Por outro lado, de um olhar menos experiente, Métrica também não parece particularmente exequível. Mas vai sê-lo, como veremos a seguir.



Repare-se que as projecções ortogonais de X, Y e H (os pontos que queremos provar que são colineares) sobre a recta BC são todas pontos bastante interessantes. A projecção de H é simplesmente L, o pé da A-altura, e as peojecções de X e Y são B e C, respectivamente.

Isto é bastante bom, pois a condição da colineariedade é fácil de exprimir em termos de comprimentos (e este é um truque a reter!). De facto, ela é equivalente a

$$\frac{\overline{BX}-\overline{HL}}{\overline{CY}-\overline{HL}}=-\frac{\overline{BL}}{\overline{CL}}.$$

Poderá não parecer totalmente óbvio, mas é simples: considerem-se, por exemplo, as projecções ortogonais P e Q de X e Y, respectivamente, sobre HL, e note-se que a colineariedade é equivalente à semelhança entre $[XPH]$ e $[YQH]$. Até aqui não fizemos nada de especial; isto é, na verdade, equivalente ao método para exprimir colineariedade de pontos em Geometria Analítica.

As nossas variáveis são, como habitual, a, b e c, e ainda $w=\overline{BW}$. Como calcular estes comprimentos? Já não temos medo de $\overline{BL}$ e $\overline{CL}$, que já vimos antes que se calculam bem em função de a, b e c. $\overline{HL}$ é agradável de calcular com trigonometria, mas com métrica será assim tanto? Não nos preocupemos com ele para já, quem sabe se conseguiremos fazê-lo cortar... e $\overline{BX}$ e $\overline{CY}$?

Usar a Lei dos Senos pode parecer má ideia, já que nos interessa reduzir tudo a comprimentos e senos nem sempre são assim tão reduzíveis a comprimentos. Mas veremos que vai funcionar bastante bem. Pela Lei dos Senos no triângulo $[BNX]$,

$$\frac{\overline{BX}}{\sin(B\widehat{N}X)}=\frac{\overline{BN}}{\sin(N\widehat{X}B)}.$$

Ora, temos $B\widehat{N}X=B\widehat{W}X=\frac{\pi}{2}-W\widehat{X}B=\frac{\pi}{2}-W\widehat{N}B$. Além disso, $\sin(N\widehat{X}B)=\sin(B\widehat{W}N)$, logo,

$$\overline{BX}=\overline{BN}\cdot\frac{\cos(W\widehat{N}B)}{\sin(B\widehat{W}N)}.$$

Um cosseno: conseguimos convertê-lo em comprimentos, usando a Lei dos Cossenos no triângulo $[BWN]$, do qual conhecemos todos os lados (o lado $\overline{WN}$ calcula-se com a Lei dos Cossenos neste mesmo triângulo, já que conhecemos $\cos(N\widehat{B}W)$ pela Lei dos Cossenos em $[ABC]$). E o $\sin(B\widehat{W}N)$?

A verdade é que, usando $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, sabendo o cosseno podemos obter o valor do seno. Mas, desta forma, ficamos com uma raiz quadrada que pode ser um pouco chata de trabalhar. Vamos assim usar um truque um pouco diferente para nos livrarmos do seno: usamos a definição de seno que se aprende na escola. Sejam d_M e d_N as distâncias de M e N à recta BC, respectivamente. Então $\sin(B\widehat{W}N)=\frac{d_N}{\overline{WN}}$, (e, analogamente, $\sin(M\widehat{W}C)=\frac{d_M}{\overline{WM}}$). Substituindo na igualdade anterior,

$$\overline{BX}=\overline{BN}\cdot\frac{\left(\frac{\overline{WN}^2+\overline{BN}^2-\overline{BW}^2}{2\cdot\overline{WN}\cdot\overline{BN}}\right)}{\left(\frac{d_N}{\overline{WN}}\right)}=\frac{\overline{WN}^2+\overline{BN}^2-\overline{BW}^2}{2d_N}.$$

Os comprimentos $\overline{WN}$ e $\overline{BN}$ até cortaram, o que é muito bom; o primeiro, em particular, envolvia uma raiz quadrada feia. O único comprimento incómodo neste momento é o próprio d_N; mas em todo o caso podemos calculá-la facilmente com trigonometria e reduzir a métrica, o que não há-de ser mau demais. De qualquer modo, não nos preocupemos com ela agora, talvez nos livremos facilmente dessas distâncias. Substituindo, o que queremos provar fica

$$\frac{\frac{\overline{WN}^2+\overline{BN}^2-\overline{BW}^2}{2d_N}-\overline{HL}}{\frac{\overline{WM}^2+\overline{CM}^2-\overline{CW}^2}{2d_M}-\overline{HL}}=-\frac{\overline{BL}}{\overline{CL}}$$

o que, simplificando, fica

$$\frac{\overline{WN}^2+\overline{BN}^2-\overline{BW}^2-2d_N\cdot\overline{HL}}{\overline{WM}^2+\overline{CM}^2-\overline{CW}^2-2d_M\cdot\overline{HL}}\cdot\frac{d_M}{d_N}=-\frac{\overline{BL}}{\overline{CL}}.$$

Temos de fazer alguma coisa em relação a d_M e d_N. Observe-se para começar que a *razão* entre as duas é bem calculável:

$$\frac{d_M}{d_N}=\frac{\left(\frac{d_M}{\overline{AL}}\right)}{\left(\frac{d_N}{\overline{AL}}\right)}=\frac{\left(\frac{\overline{CM}}{b}\right)}{\left(\frac{\overline{BN}}{c}\right)}=\frac{a\cos\gamma}{a\cos\beta}\cdot\frac{c}{b}=\frac{c\cos\gamma}{b\cos\beta}.$$

Então, o que queremos provar é (substituindo já $\overline{BL}=c\cos\beta$ e $\overline{CL}=b\cos\gamma$)

$$\frac{\overline{WN}^2+\overline{BN}^2-\overline{BW}^2-2d_N\cdot\overline{HL}}{\overline{WM}^2+\overline{CM}^2-\overline{CW}^2-2d_M\cdot\overline{HL}}\cdot\frac{c\cos\gamma}{b\cos\beta}=-\frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma}$$

$$\frac{\overline{WN}^2+\overline{BN}^2-\overline{BW}^2-2d_N\cdot\overline{HL}}{\overline{WM}^2+\overline{CM}^2-\overline{CW}^2-2d_M\cdot\overline{HL}}=-\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}.$$

Sim, nós temos expressões métricas para $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ e podemos substituí-las, para nos livrarmos dos cossenos. Mas não o faremos enquanto não precisarmos realmemente; enquanto ainda não podemos fazer nada com a expressão, é preferível deixar tudo nesta forma, onde até podemos conseguir cortar factores que não veríamos se expandíssemos logo tudo. Avançamos com o pensamento reconfortante de que, se necessário, podemos substituir $\cos\beta=\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$ e $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

A única parte aborrecida continua a ser o facto de ainda termos na expressão d_M e d_N. Note-se que o nosso lado direito se pode escrever como uma fracção racional nas nossas variáveis, e no lado esquerdo só os produtos $d_N\cdot\overline{HL}$ e $d_M\cdot\overline{HL}$ o poderiam impedir. Assim, é de esperar que estes produtos tenham expressões métricas agradáveis. Vamos calculá-los.

Temos $d_N=\overline{BN}\sin\beta=a\cos\beta\cdot\sin\beta$. Por outro lado, $\overline{HL}=\overline{BL}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=\frac{c\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\gamma}$. Assim, $d_N\cdot\overline{HL}=ac\cos^2\beta\cdot\cos\gamma\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$. Que pena, ainda há senos! Mas não é grave, pois, pela Lei dos Senos, $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{b}{c}$. Então,

$$d_N\cdot\overline{HL}=ab\cos^2\beta\cdot\cos\gamma$$

e, analogamente,

$$d_M \cdot \overline{HL} = ac\cos^2\gamma \cdot \cos\beta.$$

Agora sim, já só há cossenos e já temos tudo aquilo de que precisamos para reduzir tudo a Métrica e provar a nossa igualdade. O que queremos provar agora é

$$\frac{\overline{WN}^2 + \overline{BN}^2 - \overline{BW}^2 - 2ab\cos^2\beta \cdot \cos\gamma}{\overline{WM}^2 + \overline{CM}^2 - \overline{CW}^2 - 2ac\cos^2\gamma \cdot \cos\beta} = -\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}$$

(mais uma vez não substituímos logo os cossenos pelas suas formas métricas: só o faremos quando realmente precisarmos).

Vamos parar um pouco para perceber o que estamos a fazer. A esta altura é óbvio que tanto o numerador como o denominador do lado esquerdo se vão poder escrever como polinómios em w (considerando a, b e c como constantes). Queremos provar que a razão entre estes dois polinómios é constante: a nossa intuição algébrica diz-nos que tal acontece se e só se a razão entre os coeficientes dos termos correspondentes é igual a essa constante. Isto não é essencial para compreender a solução, apenas dá uma ideia do que se está a passar.

Vamos tratar primeiro do $\overline{WN}^2$: temos

$$\overline{WN}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{BW}^2 - 2\overline{BN} \cdot \overline{BW}\cos\beta = \overline{BN}^2 + w^2 - 2\overline{BN}w\cos\beta.$$

Substituindo esta expressão e uma análoga para $\overline{WM}^2$, o que queremos provar fica (note-se que $w^2 = \overline{BW}^2$ e $(a-w)^2 = \overline{CW}^2$ desaparecem):

$$\frac{\overline{BN}^2 - \overline{BN} \cdot \overline{BW} \cdot \cos\beta - ab\cos^2\beta\cos\gamma}{\overline{CM}^2 - \overline{CM} \cdot \overline{CW} \cdot \cos\gamma - ac\cos^2\gamma\cos\beta} = -\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}$$

$$\frac{a^2\cos^2\beta - a\cos^2\beta \cdot w - ab\cos^2\beta\cos\gamma}{a^2\cos^2\gamma - a\cos^2\gamma(a-w) - ac\cos^2\gamma\cos\beta} = -\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}$$

$$\frac{-\cos^2\beta \cdot w + a\cos^2\beta - b\cos^2\beta\cos\gamma}{\cos^2\gamma \cdot w - c\cos^2\gamma\cos\beta} = -\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}.$$

Queremos provar que a razão entre dois polinómios lineares em w é constante e igual a $-\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}$. Para tal, vamos provar que esta é a razão entre os coeficientes de w e também entre os coeficientes constantes. A razão entre os coeficientes de w é trivialmente igual ao que queremos (teria sido inútil substituir os cossenos pela expressão métrica!), logo resta-nos provar que

$$\frac{a\cos^2\beta - b\cos^2\beta\cos\gamma}{-c\cos^2\gamma\cos\beta} = -\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}$$

o que, simplificando, fica

$$a - b\cos\gamma = c\cos\beta$$

e agora, sim, isto já não simplifica mais directamente e vamos substituir os cossenos pela expressão métrica. O que queremos provar equivale a

$$a - b \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = c \cdot \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$$

e isto é trivial de verificar, logo o problema está concluído! $\square$

É razoável afirmar que esta solução não é "puramente" métrica; de facto, usámos algumas ideias trigonométricas, e, apesar de termos insistido em fazer com que aparecessem apenas cossenos, praticamente nunca precisámos de os substituir por expressões métricas. Contudo, estas pequenas ideias trigonométricas por vezes são úteis e o facto de não termos substituído quase cossenos nenhuns deveu-se mais a um "milagre" deste problema em particular do que a qualquer outra coisa, além de que introduzimos vários truques úteis.

Vamos agora passar a apresentar ideias que envolvem Potência de Ponto.

4.3 Um pouco de Potência de Ponto

Vamos supor que a definição e as propriedades básicas da Potência de Ponto são já conhecidas de todos.

É evidente que o Teorema das Cordas pode ser útil para calcular comprimentos, e vamos utilizar esse potencial nos exemplos que mostraremos mais à frente. Mas, para começar, vamos apresentar um truque um pouco mais subtil que pode ser útil para provar perpendicularidades.

4.3.1 Provando perpendicularidades

Sejam A, B, C, D pontos. Como exprimir a condição $AC \perp BD$ em termos de comprimentos? O Lema seguinte dar-nos-á a resposta a esta pergunta.

Lema 4.6. *As rectas AC e BD são perpendiculares se e só se*

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2.$$

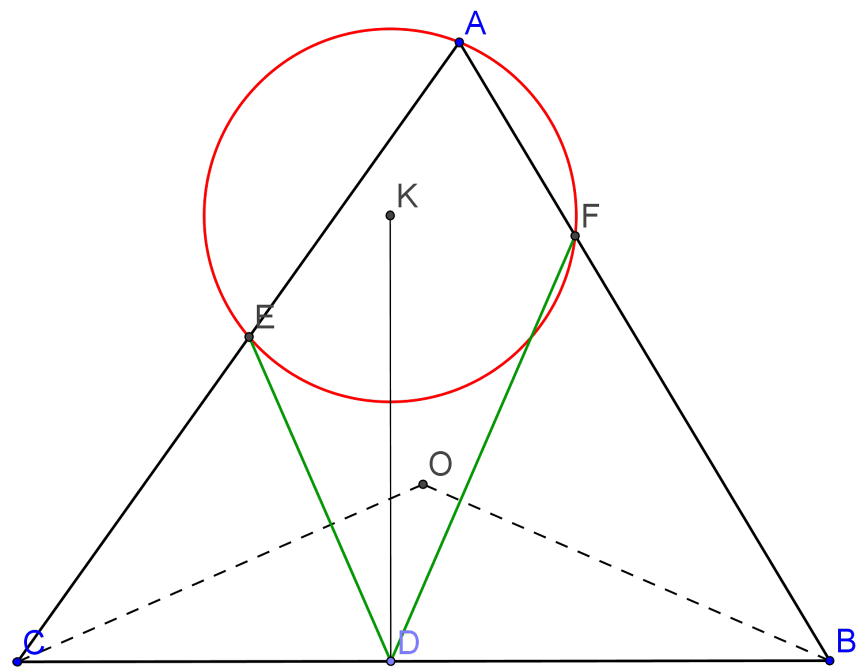
Demonstração. O leitor poderá provar facilmente que cada ponto X na recta BD é determinado unicamente pela diferença $\overline{BX}^2 - \overline{DX}^2$ (ou, por outras palavras, que a função $f : BD \to \mathbb{R}$ definida por $f(X) = \overline{BX}^2 - \overline{DX}^2$ é injectiva). Sejam agora K e L as projecções ortogonais de A e C, respectivamente, sobre BD. A condição $AC \perp BD$ equivale a $K = L$, ou seja, a $\overline{BK}^2 - \overline{DK}^2 = \overline{BL}^2 - \overline{DL}^2$; isto, por sua vez, equivale a $(\overline{BK}^2 + \overline{AK}^2) - (\overline{DK}^2 + \overline{AK}^2) = (\overline{BL}^2 + \overline{CL}^2) - (\overline{DL}^2 + \overline{CL}^2)$, e isto, pelo Teorema de Pitágoras, fica $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2$, o que equivale ao pretendido. $\square$

Observe-se que o Lema nos diz, por outras palavras, que o lugar geométrico dos pontos X tais que $\overline{BX}^2 - \overline{DX}^2 = \lambda$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, é uma recta perpendicular a BD.

E pronto, temos um critério de perpendicularidade com comprimentos, o que naturalmente aumenta ainda mais o poder da Métrica. Mas a maior subtileza deste critério está na sua aplicabilidade com Potência de Ponto. Para vermos como essa aplicabilidade funciona, vamos ver um exemplo: mais um problema para meninas.

Problema 44 (EGMO 2012)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com circuncentro O. Sejam D, E e F pontos nos lados $[BC]$, $[CA]$ e $[AB]$, respectivamente, tais que DE é perpendicular a CO e DF é perpendicular a BO.*

Seja K o circuncentro do triângulo $[AFE]$. Prova que as rectas DK e BC são perpendiculares.



Solução. Como podemos usar as condições $DE \perp CO$ e $DF \perp BO$? Dava-nos jeito caracterizar as "posições" de D, E, F nos lados do triângulo e podemos tentar fazê-lo com o Lema **??**. Infelizmente, isso envolve as distâncias $\overline{DO}$, $\overline{EO}$ e $\overline{FO}$, o que parece desagradável. Mais concretamente, temos

$$\overline{CD}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OE}^2$$

$$\overline{BD}^2 - \overline{BF}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OF}^2$$

mas exprimir de maneira útil os comprimentos $\overline{DO}$, $\overline{EO}$ e $\overline{FO}$ parece pouco prático. Mas onde é que já vimos estes comprimentos ao quadrado antes? Na definição de Potência de Ponto, claro! Temos, sendo Γ a circunferência circunscrita a $[ABC]$ e R o seu raio,

$$\text{Pot}(X, \Gamma) = \overline{OX}^2 - R^2$$

para cada ponto X.

Então, temos $\overline{OD}^2 - \overline{OE}^2 = (\overline{OD}^2 - R^2) - (\overline{OE}^2 - R^2) = \text{Pot}(D, \Gamma) - \text{Pot}(E, \Gamma) = (-\overline{CD} \cdot \overline{DB}) - (-\overline{CE} \cdot \overline{EA})$ (recorde-se que a Potência é negativa se o ponto está no interior da circunferência), logo

$$\overline{CD}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{CE} \cdot \overline{EA} - \overline{CD} \cdot \overline{DB}$$

$$\overline{CD}(\overline{CD}+\overline{DB})=\overline{CE}(\overline{CE}+\overline{EA})$$

$$\overline{CD}\cdot\overline{CB}=\overline{CE}\cdot\overline{CA}$$

ou seja, o quadrilátero $[BDEA]$ é cíclico, e analogamente $[DCAF]$ também o é! (Obviamente que isto se podia provar directamente com angle-chasing, mas assim demos um exemplo extra de aplicação desta ideia; a parte seguinte deixará os leitores mais convencidos do seu poder.)

O que nós queremos provar equivale, pelo Lema **??**, a

$$\overline{BD}^2-\overline{CD}^2=\overline{BK}^2-\overline{CK}^2$$

e, mais uma vez, as distâncias $\overline{BK}$ e $\overline{CK}$ parecem desagradáveis. Mas é só usar o mesmo truque outra vez: seja R_1 o raio da circunferência circunscrita Ω de $[AFE]$. Então,

$$\overline{BK}^2-\overline{CK}^2=(\overline{BK}^2-R_1^2)-(\overline{CK}^2-R_1^2)=\mathrm{Pot}(B,\Omega)-\mathrm{Pot}(C,\Omega)=\overline{BF}\cdot\overline{BA}-\overline{CE}\cdot\overline{CA}.$$

Ora, $\overline{BF}\cdot\overline{BA}=\overline{BD}\cdot\overline{BC}$ e $\overline{CE}\cdot\overline{CA}=\overline{CD}\cdot\overline{CB}$, logo

$$\overline{BK}^2-\overline{CK}^2=\overline{BC}(\overline{BD}-\overline{CD})=(\overline{BD}+\overline{CD})(\overline{BD}-\overline{CD})=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$$

e isto conclui o problema! □

Agora vamos mostrar outro exemplo, em que vamos misturar ideias de Potência de Ponto com as ideias vistas anteriormente.

Problema 45. [6] *Seja $[ABC]$ um triângulo tal que $[BC]$ é o maior lado, e sejam X e Y pontos nas rectas AC e AB, respectivamente, tais que $\overline{BY}=\overline{CX}=\overline{BC}$ e X, Y e A estão no mesmo semiplano definido por BC. Sejam I e O o incentro e o circuncentro de $[ABC]$, respectivamente. Mostra que o segmento $[OI]$ é perpendicular a XY e tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência circunscrita a $[AYX]$.*

Solução. Vamos começar pela primeira parte, $XY\perp OI$. A abordagem já não é surpreendente: queremos provar que

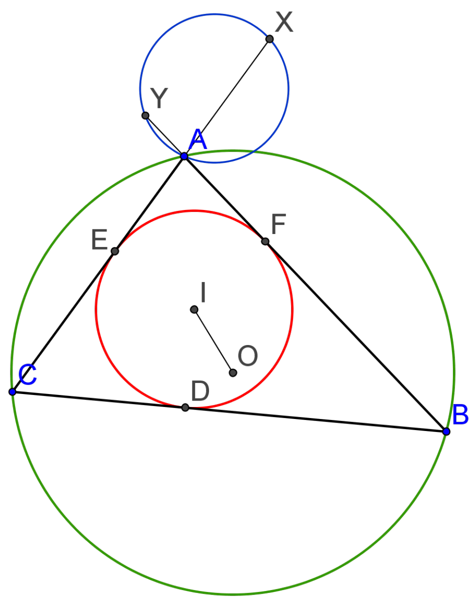
$$\overline{XI}^2-\overline{YI}^2=\overline{XO}^2-\overline{YO}^2$$

e mais uma vez estas distâncias não são particularmente agradáveis de calcular, mas como são distâncias a centros podemos usar o truque da Potência de Ponto.

Sejam Ω e ω as circunferências circunscrita a inscrita em $[ABC]$, e sejam R e r o circunraio e o inraio de $[ABC]$, respectivamente. Temos

$$\overline{XI}^2-\overline{YI}^2=(\overline{XI}^2-r^2)-(\overline{YI}^2-r^2)=\mathrm{Pot}(X,\omega)-\mathrm{Pot}(Y,\omega).$$

[6] Este problema apareceu na Liga Delfos em 2012. Durante o match, em uma das equipas, um elemento sugeriu a outro atacar o problema com bruteforce, ao que este respondeu que tal "não era humanamente fazível". Aqui se prova o contrário.



Ora, temos $\operatorname{Pot}(X,\omega) = \overline{XE}^2$ e $\operatorname{Pot}(Y,\omega) = \overline{YF}^2$, logo

$$\overline{XI}^2 - \overline{YI}^2 = \overline{XE}^2 - \overline{YF}^2$$

e temos $\overline{XE} = \overline{XA} + \overline{AE} = (a-b) + (s-a) = (s-b) = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a-b+c}{2}$. (Aqui s é, como habitual, o semiperímetro de $[ABC]$.) Analogamente, $\overline{YF} = \frac{a+b-c}{2}$.

Logo,

$$\overline{XI}^2 - \overline{YI}^2 = \left(\frac{a-b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 = a(c-b).$$

Por outro lado,

$$\overline{XO}^2 - \overline{YO}^2 = (\overline{XO}^2 - R^2) - (\overline{YO}^2 - R^2) = \operatorname{Pot}(X,\Omega) - \operatorname{Pot}(Y,\Omega)$$

e, pelo Teorema das Cordas, isto é igual a

$$\overline{XA} \cdot \overline{XC} - \overline{YA} \cdot \overline{YB} = (a-b)\cdot a - (a-c)\cdot a = a(c-b).$$

Logo, $\overline{XI}^2 - \overline{YI}^2 = \overline{XO}^2 - \overline{YO}^2$, como pretendido.

Vamos à segunda parte. O Teorema de Euler (ver Apêndice **??**) dá-nos uma expressão para $\overline{OI}$, se bem que pouco agradável: temos $\overline{OI}^2 = R^2 - 2rR$. E, como calcular o raio da circunferência circunscrita a $[AYX]$?

Temos que, pela Lei dos Senos, este raio é igual a $\frac{\overline{XY}}{2\sin\alpha}$. Converter $\sin\alpha$ numa expressão métrica pode ser desagradável, mas o seu quadrado é $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, e isto não é de todo mau, sobretudo sem uma alternativa à vista. $\overline{XY}^2$ pode ser facilmente calculado com a Lei dos Cossenos.

Então já temos tudo aquilo de que precisamos? Não inteiramente, pois falta-nos converter R^2 e $2rR$ em Métrica. Vamos ao primeiro: temos $R^2 = \left(\frac{a}{2\sin^2\alpha}\right)^2 = \frac{a^2}{4\sin^2\alpha}$; então,

$$R^2 = \frac{a^2}{4(1-\cos^2\alpha)} = \frac{a^2}{4\left(1-\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}\right)^2\right)}.$$

Vamos ser subtis ao simplificar esta expressão: ela vai factorizar muito agradavelmente. Temos

$$1-\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}\right)^2 = \frac{(2bc)^2-(-a^2+b^2+c^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{(a^2-b^2-c^2+2bc)(-a^2+b^2+c^2+2bc)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2}{4b^2c^2} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}.$$

Assim,

$$R^2 = \frac{a^2}{4\left(\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}\right)} = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

E como tratar do r? Observe-se que as áreas dos triângulos $[BIC]$, $[AIC]$, $[AIB]$ são iguais a $\frac{ar}{2}$, $\frac{br}{2}$, $\frac{cr}{2}$, respectivamente. Logo, a área de $[ABC]$ é igual a $\frac{(a+b+c)r}{2}$; pela fórmula de Herão, temos assim

$$\frac{(a+b+c)r}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$r = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2(a+b+c)}.$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
&2rR\\
&= 2\cdot\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2(a+b+c)}\cdot\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}\\
&= \frac{abc}{a+b+c}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\overline{OI}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} - \frac{abc}{a+b+c}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{XY}^2 &= \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 - 2\cdot\overline{AX}\cdot\overline{AY}\cos\alpha\\
&= (a-b)^2 + (a-c)^2 - 2(a-b)(a-c)\cdot\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}\\
&= (a-b)^2 + (a-c)^2 - (a-b)(a-c)\cdot\frac{-a^2+b^2+c^2}{bc}.
\end{aligned}$$

Ora, temos $(a-b)^2+(a-c)^2=(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)=2(a^2-ab-ac)+b^2+c^2=b^2+c^2-2a(b+c-a)$. Além disso,

$$\begin{aligned}(a-b)(a-c)\cdot\frac{-a^2+b^2+c^2}{bc} =&(a^2-ab-ac+bc)\cdot\frac{-a^2+b^2+c^2}{bc}\\ &= -a^2+b^2+c^2-a(b+c-a)\cdot\frac{-a^2+b^2+c^2}{bc}\end{aligned}$$

e portanto

$$\overline{XY}^2=a^2-a(b+c-a)\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{bc}-2\right)=a^2-\frac{a(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{bc}.$$

Para obtermos o quadrado do circunraio de $[AYX]$, falta-nos dividir por $4\sin^2\alpha$. Ora, já vimos atrás que $\sin^2\alpha=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}$. Então o quadrado do raio pretendido é

$$\begin{aligned}R^2_{[AYX]}&=\frac{\left(a^2-\frac{a(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{bc}\right)}{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{b^2c^2}}\\ &=\frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}-\frac{abc}{a+b+c}.\end{aligned}$$

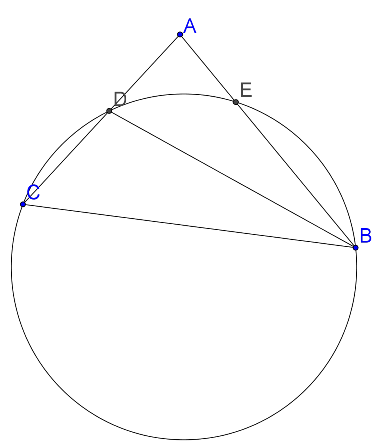
Logo, $R^2_{[AYX]}=\overline{OI}^2$, pelo que $R_{[AYX]}=\overline{OI}$. Isto conclui o problema.

$\square$

4.3.2 Abusando do Teorema das Cordas

O Teorema das Cordas dá-nos uma relação entre quatro comprimentos. Logo, se tivermos expressões métricas agradáveis para três deles, podemos determinar o quarto.

Observe-se, por exemplo, a figura seguinte.



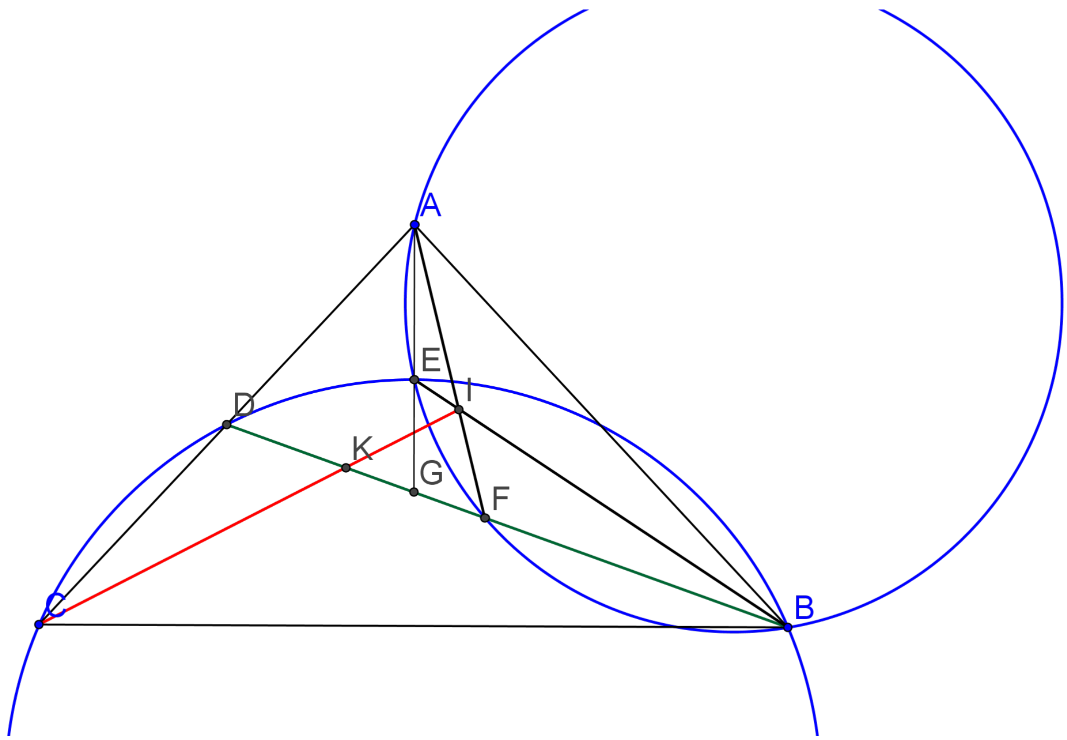
Na figura, D é a intersecção de AC com a bissectriz interna de $\angle ABC$. O ponto E é a intersecção de AB com o circuncírculo de $[BCD]$. Como calcular $\overline{AE}$ em função dos lados do triângulo? Ora, simples: já vimos como obter $\overline{AD} = \frac{bc}{a+c}$. Então, como pelo Teorema das Cordas $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AE}$, obtemos

$$b \cdot \frac{bc}{a+c} = c \cdot \overline{AE}$$

pelo que $\overline{AE} = \frac{b^2}{a+c}$.

O exemplo que vamos apresentar usa o Teorema das Cordas, mas de maneira um pouco mais subtil. Esta solução não merece ser descrita como "brute force", pois, apesar de fazermos planos para grandes contas, quase todas vão simplificar muito (muito mesmo!) e as que não vão podem ser substituídas por observações sintéticas muito (mesmo muito!) simples. Contudo, é um exemplo bastante instrutivo em termos de ideias métricas utilizadas, pelo que merece figurar aqui.

Problema 46 (IMO Shortlist 2011). *Seja $[ABC]$ um triângulo com $\overline{AB} = \overline{AC}$, e seja D o ponto médio de $[AC]$. A circunferência circunscrita ao triângulo $[BDC]$ intersecta a bissectriz do ângulo $\angle CAB$ no ponto E no interior de $[ABC]$. A circunferência circunscrita ao triângulo $[ABE]$ intersecta a recta BD num ponto $F \neq B$. As rectas AF e BE intersectam-se em I, e as rectas CI e BD intersectam-se em K. Prova que I é o incentro do triângulo $[KAB]$.*



Solução. Vamos começar por provar que BI é a bissectriz do ângulo $\angle ABK$; esta bissectriz é fácil de provar com angle-chasing fácil. Para não perdermos tempo com angle-chasing, vamos usar um truque maricas: seja D' o ponto médio de $[AB]$. Então, por simetria, E é o ponto médio do arco DD'. Logo, $D'\widehat{B}E = E\widehat{B}E$; isto é equivalente ao que queremos.

Então agora temos duas opções: ou provamos que AF é a bissectriz do ângulo $\angle KAB$, ou provamos que KI é a bissectriz do ângulo $\angle BKA$. Neste momento não é nada óbvio como proceder, principalmente porque o ponto K é bastante estranho; mais concretamente, a recta CI parece estranhamente arbitrária e parece haver pouco a fazer com ela.

Vamos explorar a segunda possibilidade: seja $T = CI \cap AB$. Queremos provar que KT bissecta $\angle BKA$; vamos tentar traduzir isto na linguagem da Métrica. Pelo Teorema da Bissectriz, queremos provar que

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{AK}}.$$

O que sabemos sobre a posição de T na recta AB? O Teorema de Menelaus dá-nos uma relação engraçada: pelo Teorema de Menelaus no triângulo $[ABD]$, com a recta TKC, temos

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DK}}{\overline{KB}} = 1$$

(normalmente, quando trabalhamos com Menelaus ignoramos a orientação dos comprimentos). Como $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = 2$, temos

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{BK}}{2\overline{DK}}.$$

Então, queremos provar que $\frac{\overline{BK}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{BK}}{2\overline{DK}}$, ou seja, que

$$\overline{AK} = 2\overline{DK}.$$

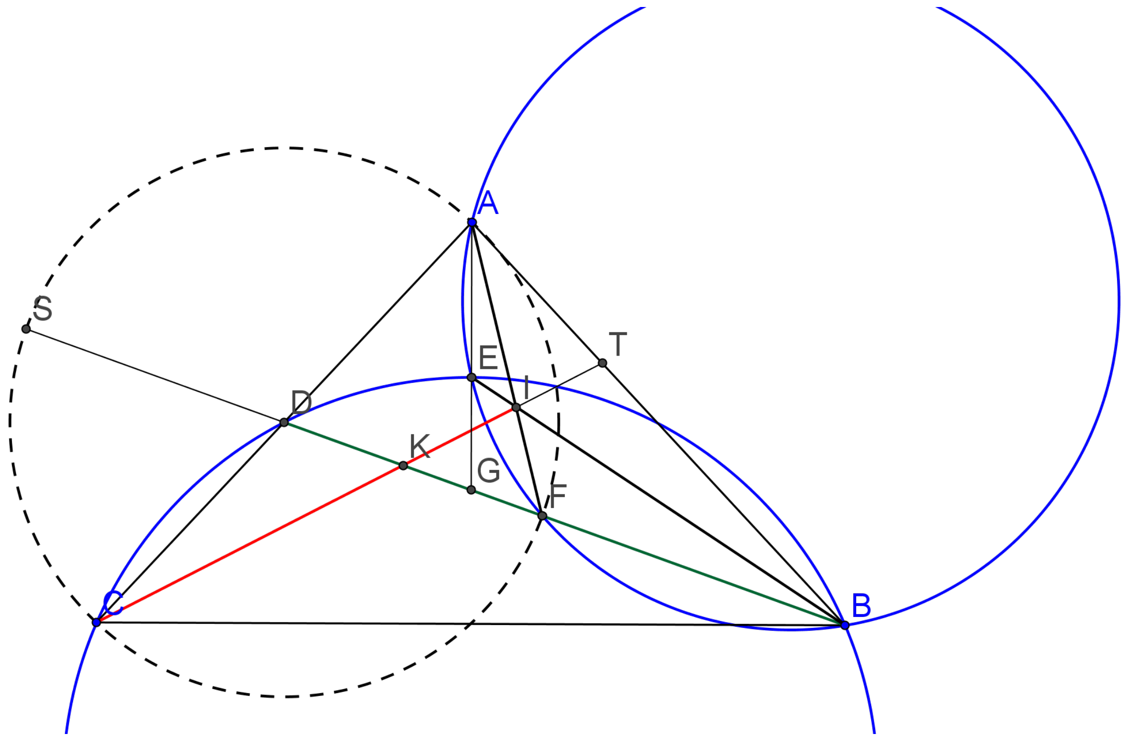
Isto sugere que temos de descobrir algo sobre a posição de K na recta AD, e que esse "algo" não pode ser demasiado complicado. Mas isto parece quase contraditório com a natureza "estranha" do ponto K. O que podemos fazer com a recta CI?

A recta CI tem aspecto de eixo radical, não? De facto, o ponto I, pelo Teorema das Cordas, é tal que $\overline{IA} \cdot \overline{IF} = \overline{IB} \cdot \overline{IE}$. Além disso, C é um ponto na circunferência circunscrita a $[CEB]$ (que afirmação mais vazia!). Então CI é o eixo radical de quê? Da circunferência circunscrita a $[CEB]$ e da circunferência circunscrita a $[CAF]$. Essa última ainda não está no problema, mas nós introduzimo-la.

Qual é a vantagem disto? É que assim já sabemos algo sobre a posição do ponto K: ele o ponto na recta BD que tem a mesma potência em relação às circunferências circunscritas a $[BDC]$ e $[CAF]$. Sendo S o ponto de intersecção desta última circunferência com BD, diferente de F, temos

$$\overline{KS} \cdot \overline{KF} = \overline{KD} \cdot \overline{KB}.$$

Agora, para podermos explorar esta condição, devemos descobrir algo sobre a posição de S. Como $\overline{DS} \cdot \overline{DF} = \overline{DA} \cdot \overline{DC}$, seria útil calcular $\overline{DF}$. Isto parece exigir muitas contas (embora seja exequível



com repetidas aplicações do Teorema das Cordas)! Mas felizmente não precisamos de as fazer, pois estamos com sorte: temos $\overline{DF} = \overline{DA}$, o que se prova facilmente com angle-chasing:

$$A\widehat{F}D = \pi - B\widehat{F}A = \pi - B\widehat{E}A = G\widehat{E}B = \frac{1}{2}C\widehat{E}B = \frac{1}{2}C\widehat{D}B = \frac{\pi}{2} - F\widehat{D}A$$

e daqui decorre que $A\widehat{F}D = D\widehat{F}A$. Logo, $\overline{DA} = \overline{DF}$.

Estamos realmente com sorte, pois então $\overline{DF} = \overline{DA} = \overline{DC} = \overline{DS}$! De facto calcular $\overline{DS}$ não podia ter sido mais agradável. Então temos, já que $\overline{KS} \cdot \overline{KF} = \overline{KD} \cdot \overline{KB}$,

$$\begin{aligned}
(\overline{DF} + \overline{DK})(\overline{DF} - \overline{DK}) &= \overline{DK}(\overline{DB} - \overline{DK}) \\
\overline{DF}^2 - \overline{DK}^2 &= \overline{DK} \cdot \overline{DB} - \overline{DK}^2 \\
\overline{DF}^2 &= \overline{DK} \cdot \overline{DB} \\
\overline{DA}^2 &= \overline{DK} \cdot \overline{DB}.
\end{aligned}$$

Já sabemos como calcular $\overline{DK}$! Depois podemos calcular $\overline{AK}$ com a Lei dos Cossenos. Mas, já que até agora conseguimos controlar tão bem as contas, para quê estragar tudo no momento final? Paremos um momento para olhar para esta igualdade. Ela equivale a

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$$

pelo que os triângulos $[DAK]$ e $[DBA]$ são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} = 2$$

e daqui segue que $\overline{AK} = 2\overline{DK}$, e isto conclui o problema.

$\square$

4.4 Problemas propostos

Chegámos à hora dos problemas. Os seguintes problemas podem ser resolvidos com alguma Métrica.

Problema 47 (USA TST 2012). *No triângulo acutângulo $[ABC]$, $[BC]$ é o menor lado. Um ponto P está no lado $[BC]$. Os pontos D e E estão nos lados $[AB]$ e $[AC]$, respectivamente, e são tais que $\overline{BP} = \overline{PD}$ e $\overline{CP} = \overline{PE}$. Prova que o circuncírculo do triângulo $[ADE]$ passa por um ponto fixo diferente de A, quando P varia.*

Problema 48 (RMM 2012). *Dado um triângulo não isósceles $[ABC]$, sejam D, E e F os pontos médios de $[BC]$, $[CA]$ e $[AB]$, respectivamente. A circunferência circunscrita ao triângulo $[BCF]$ e a recta BE intersectam-se em $P \neq B$, e a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABE]$ e a recta AD intersectam-se em $Q \neq A$. As rectas DP e FQ intersectam-se em R. Prova que o baricentro do triângulo $[ABC]$ está na circunferência circunscrita ao triângulo $[PQR]$.*

Problema 49 (Ibero 2011). *Seja $[ABC]$ um triângulo e sejam X, Y e Z os pontos de tangência do incírculo nos lados $[BC]$, $[CA]$ e $[AB]$, respectivamente. Suponhamos que $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ são circunferências com cordas $[YZ]$, $[ZX]$ e $[XY]$, respectivamente, tais que $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ se intersectam na recta CZ e $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ se intersectam na recta BY. Suponhamos que $\mathcal{C}_1$ intersecta as rectas XY e ZX em J e M, respectivamente; que $\mathcal{C}_2$ intersecta as rectas YZ e XY em L e I, respectivamente; e que $\mathcal{C}_3$ intersecta as rectas YZ e ZX em K e N, respectivamente. Prova que os seis pontos I, J, K, L, M e N estão sobre uma mesma circunferência.*

Problema 50 (IMO Shortlist 2012). *Seja $[ABC]$ um triângulo com circuncírculo ω e seja l uma recta que não tem pontos em comum com ω. Seja P o pé da perpendicular do centro de ω sobre l. As rectas BC, CA e AB intersectam l nos pontos X, Y e Z, respectivamente. Prova que as circunferências circunscritas aos triângulos $[AXP]$, $[BYP]$ e $[CZP]$ têm um ponto em comum diferente de P ou são todas tangentes em P.*

Problema 51 (IMO Shortlist 2006). *No triângulo $[ABC]$, sejam M_a, M_b e M_c os pontos médios de $[BC]$, $[CA]$ e $[AB]$, respectivamente, e sejam T_a, T_b, T_c os pontos médios dos arcos BC, CA e AB do circuncírculo de $[ABC]$ que não contêm A, B e C, respectivamente. Para cada $i \in \{a, b, c\}$, seja ω_i a circunferência de diâmetro $[M_iT_i]$. Seja p_i a tangente externa comum a ω_j e ω_k (para qualquer $\{i, j, k\} = \{a, b, c\}$) tal que ω_i é separada por p_i de ω_j e ω_k. Prova que o triângulo determinado pelas rectas p_a, p_b e p_c é semelhante ao triângulo $[ABC]$ e determina a razão de semelhança.*

Problema 52 (USAMO 2013). *Seja $[ABC]$ um triângulo. Determina todos os pontos P no segmento $[BC]$ com a seguinte propriedade: se X e Y são as intersecções de PA com as tangentes externas comuns aos circuncírculos de $[PAB]$ e $[PAC]$, tem-se*

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{XY}}\right)^2 + \frac{\overline{PB} \cdot \overline{PC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = 1.$$

A Expressões trigonométricas para distâncias num triângulo

As seguintes fórmulas não foram incluídas no corpo do texto. Não é realmente importante sabê-las todas de cor, pois são relativamente fáceis de provar usando a Lei dos Senos.

Seja $[ABC]$ um triângulo cujo circunraio é $R = \frac{1}{2}$, e seja $s = \frac{a+b+c}{2}$ o seu semiperímetro. Sejam I, J e H o incentro, o excentro oposto a A e o ortocentro de $[ABC]$, respectivamente. Então,

- $\overline{AH} = \cos\alpha$.
- O comprimento da altura relativa a A é $\sin\beta\sin\gamma$.
- $\overline{AI} = 2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.
- $\overline{AJ} = 2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
- O inraio é $r = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.
- O raio do excírculo oposto a A é $r_A = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
- $s - a = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Recorde-se que $s - a$ é a distância de A ao ponto de tangência do incírculo com o lado $[AB]$ (ou com o lado $[AC]$).
- $s = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$. Recorde-se que s é a distância de A ao ponto de tangência do A-excírculo com a recta AB (ou com a recta AC).
- A área de $[ABC]$ é $\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2}$.

B Expressões métricas para distâncias num triângulo

Algumas das seguintes fórmulas já foram incluídas no corpo do texto; outras, mais específicas e com menos aplicabilidade, não foram.

Seja $[ABC]$ um triângulo, R e r o seu circunraio e o seu inraio, respectivamente, e seja $s = \frac{a+b+c}{2}$ o seu semiperímetro. Então

- A distância de B ao pé da A-bissectriz é $\frac{ac}{b+c}$.
- A distância de A aos pontos de tangência do incírculo em AB e AC são iguais a $s - a$.
- A distância de C ao pé da A-altura é $\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$.
- $\overline{OI} = \sqrt{R^2 - 2rR}$. **(Teorema de Euler)**
- A área do triângulo é $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. **(Fórmula de Herão)**