Geometria para Principiantes

14 de Dezembro de 2014

Resumo

O propósito deste artigo é introduzir olímpicos iniciantes na geometria de olimpíadas, abordando as técnicas e resultados mais básicos dessa área.

Índice

Introdução e notação

Este artigo tem por objectivo ajudar olímpicos mais principiantes a dar os primeiros passos em problemas de geometria "a sério". São mesmo cobertos tópicos muito elementares, como semelhança de triângulos, Teorema do Arco Capaz e o facto de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180°; mas principalmente mostram-se ideias que nem todos conhecem já, como quadriláteros cíclicos ou Potência de Ponto, procurando-se pôr os leitores relativamente à vontade com os problemas de geometria mais standard que aparecem em olimpíadas, nomeadamente nas IMO[1].

As várias secções não são independentes entre si: para compreender uma secção, é por vezes necessário algum conteúdo das secções anteriores. Os problemas propostos em cada secção podem ser resolvidos com as ideias nela abordadas, misturadas com um pouco de criatividade.

Há algumas considerações a fazer relativamente à notação usada. Dado um triângulo $[ABC]$, vamos referir-nos, sem pré-aviso, aos comprimentos dos lados opostos a A, B e C como a, b e c, respectivamente; e definimos o *semi-perímetro* de $[ABC]$ como $s = \frac{a+b+c}{2}$, referindo-nos também a s sem definição prévia. Vamos também definir previamente $\alpha = C\widehat{A}B$, $\beta = A\widehat{B}C$, $\gamma = B\widehat{C}A$.

Dados pontos X e Y,

- XY denota a recta que passa por X e Y.
- $[XY]$ denota o segmento de recta que tem X e Y como extremos.
- $\overline{XY}$ denota o comprimento do segmento $[XY]$.

Dadas duas rectas não paralelas r e s, $r \cap s$ denota o seu ponto de intersecção. Dado um ponto P e uma recta r, a projecção ortogonal de P sobre r é o ponto Q na recta r tal que PQ é perpendicular a r.

Boa leitura!

Os autores

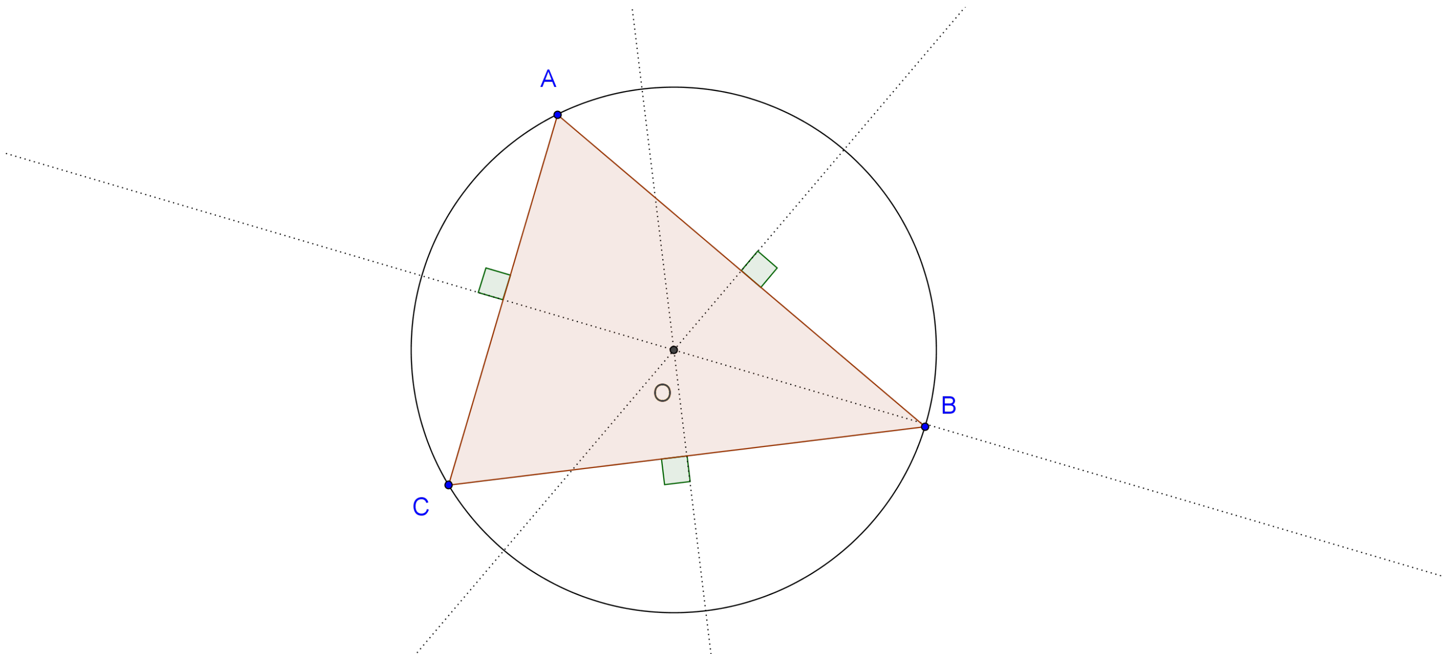
[1] Olimpíadas Internacionais de Matemática.

1 Pontos notáveis do triângulo

O típico enunciado de um problema de geometria de olimpíadas começa com “Seja $[ABC]$ um triângulo...”. Há algumas particularidades comuns a todos os triângulos $[ABC]$ que são frequentemente abordadas na geometria olímpica. Há, em particular, alguns pontos que estão muitas vezes presentes.

Vamos conhecer alguns desses pontos.

1.1 Circuncentro



O circuncentro do triângulo $[ABC]$ é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$, isto é, da circunferência que passa por A, B e C. É também o ponto de intersecção das mediatrizes dos seus três lados. Mas afinal o que é a mediatriz de um segmento?

Definição 1.1 (Mediatriz)**.** *A mediatriz do segmento de recta $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de A e B.*

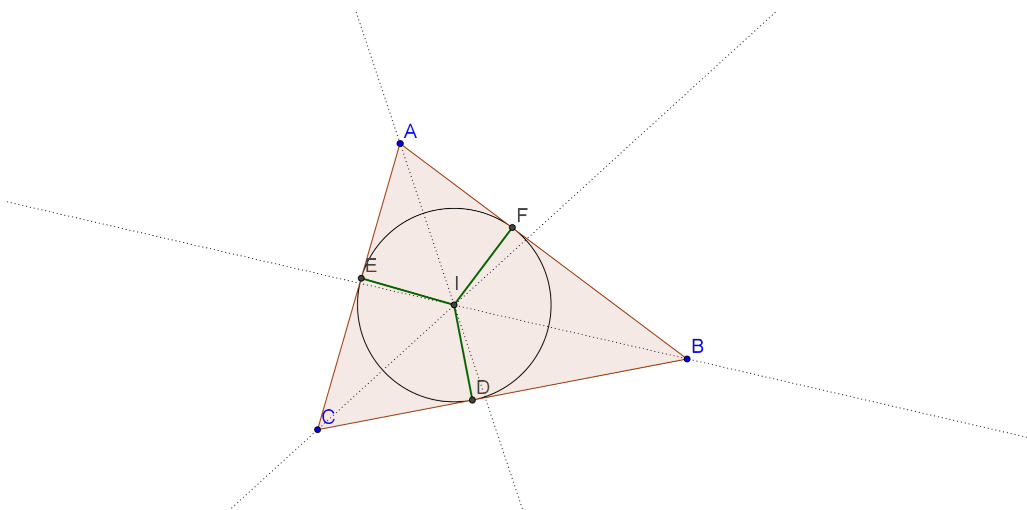
Proposição 1.2. *A mediatriz do segmento $[AB]$ é a recta perpendicular a AB que passa pelo ponto médio de $[AB]$.*

Não deve ser difícil para o leitor provar, ou pelo menos intuir, esta propriedade da mediatriz. Será, também, evidente a partir da definição de mediatriz que, se existir uma circunferência que passa por A, B e C, então o seu centro está nas mediatrizes de $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$. É também fácil de ver que, se estas mediatrizes têm um ponto em comum, então esse ponto é o centro de uma circunferência que passa por A, B e C. Mas porque se intersectam estas mediatrizes num único ponto? Ou seja, porque existe o circuncentro do triângulo? A prova é, na realidade, muito simples:

Teorema 1.3. *Seja $[ABC]$ um triângulo. Então as mediatrizes de $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$ têm um ponto O em comum. Este ponto é designado de circuncentro do triângulo $[ABC]$.*

Demonstração. Seja O o ponto de intersecção das mediatrizes de $[AB]$ e $[BC]$. Então $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $\overline{OB} = \overline{OC}$, logo $\overline{OA} = \overline{OC}$, e, assim, O está na mediatriz de $[AC]$, como pretendido. □

1.2 Incentro



O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, ou seja, da circunferência tangente aos seus três lados. É também o ponto de intersecção das bissectrizes dos três ângulos do triângulo.

Mas porque é que as três bissectrizes têm um ponto em comum?

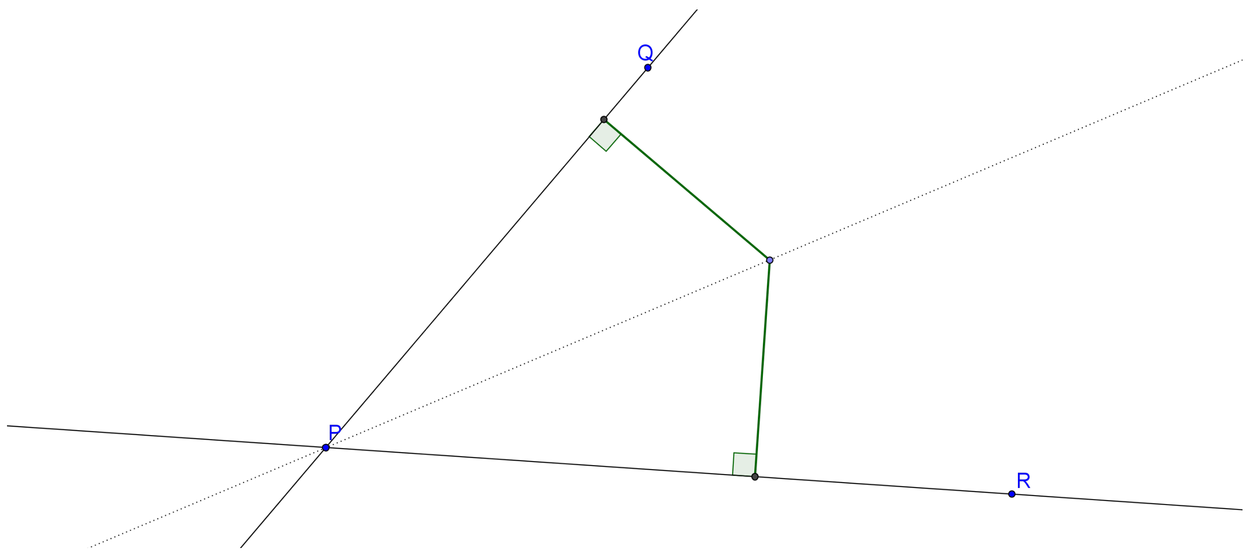
Teorema 1.4. *Seja $[ABC]$ um triângulo. Então as bissectrizes de $\angle CAB$, $\angle ABC$ e $\angle BCA$ têm um ponto I em comum. Este ponto é designado de incentro do triângulo $[ABC]$.*

Demonstração. A prova poderá não ser tão óbvia como a da concorrência das mediatrizes, porém baseia-se num argumento semelhante. Vamos utilizar a seguinte observação:

Proposição 1.5. *Sejam P, Q, R pontos não colineares. Então a bissectriz do ângulo $\angle RPQ$ é o lugar geométrico dos pontos no interior do ângulo $\angle RPQ$ que estão à mesma distância das rectas PQ e PR.*

A proposição anterior não é difícil de provar. Defina-se agora I como o ponto de intersecção das bissectrizes de $\angle CAB$ e $\angle ABC$. Sejam D, E, e F os pés das perpendiculares traçadas por I sobre os lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respectivamente. Então temos $\overline{IE} = \overline{IF}$ e $\overline{IF} = \overline{ID}$, logo $\overline{ID} = \overline{IE}$ e assim I está na bissectriz de $\angle BCA$, como pretendido.

□



Note-se que I é o circuncentro do triângulo $[DEF]$. Temos ainda um facto muito útil acerca dos pontos de tangência da circunferência inscrita:

Facto 1.6. *$\overline{AE} = \overline{AF} = s - a$, $\overline{BD} = \overline{BF} = s - b$, $\overline{CD} = \overline{CE} = s - c$.*

Demonstração. Por simetria, é fácil ver que $\overline{AE} = \overline{AF}$, $\overline{BD} = \overline{BF}$ e $\overline{CD} = \overline{CE}$. Então seja $x = \overline{AE} = \overline{AF}$, $y = \overline{BD} = \overline{BF}$ e $z = \overline{CD} = \overline{CE}$. Temos assim

$$a = y + z \tag{1}$$

$$b = x + z \tag{2}$$

$$c = x + y \tag{3}$$

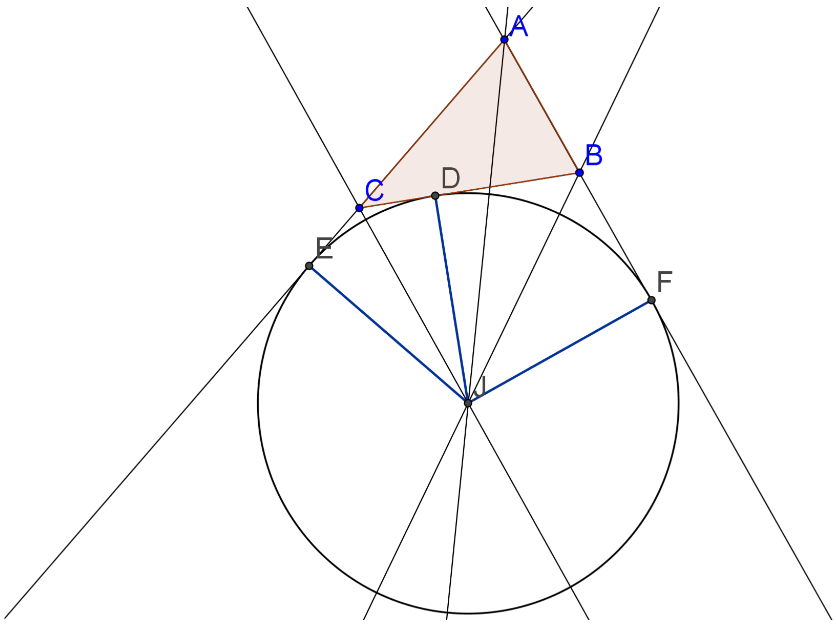
Então, por (2) + (3) − (1), temos $b + c - a = (x + z) + (x + y) - (y + z) = 2x$, ou seja, $x = \frac{b+c-a}{2} = s - a$. As restantes igualdades são análogas.

□

1.3 Excentros

Os excentros são, como o nome indica, os centros das três circunferências *excritas* no triângulo.

As circunferências excritas, tal como a circunferência inscrita, são tangentes às rectas AB, BC, e CA. Contudo, enquanto a circunferência inscrita é tangente aos *segmentos* $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$, cada circunferência excrita é tangente a apenas um destes segmentos e é tangente às restantes duas rectas fora do segmento. Assim, por exemplo, a circunferência excrita oposta ao vértice A



é tangente ao lado $[BC]$ e aos prolongamentos das rectas AB e AC no sentido de A para B e no sentido de A para C, respectivamente.

O centro da circunferência excrita oposta a A está na bissectriz *interna* do ângulo $\angle CAB$ e nas bissectrizes *externas* dos outros dois ângulos (ver figura). A prova de que estas bissectrizes se intersectam num ponto é semelhante à prova da concorrência das bissectrizes internas, pelo que a omitiremos.

1.4 Baricentro

O baricentro é o ponto de intersecção das três medianas do triângulo.

Definição 1.7 (Mediana)**.** *A A-mediana do triângulo $[ABC]$ é a recta que passa por A e pelo ponto médio do lado $[BC]$. A B-mediana e a C-mediana definem-se de modo análogo.*

Quem leu as páginas anteriores já se estará a perguntar porque concorrem as três medianas num mesmo ponto. Desta vez a demonstração vai requerer uma ideia um pouco mais engenhosa.

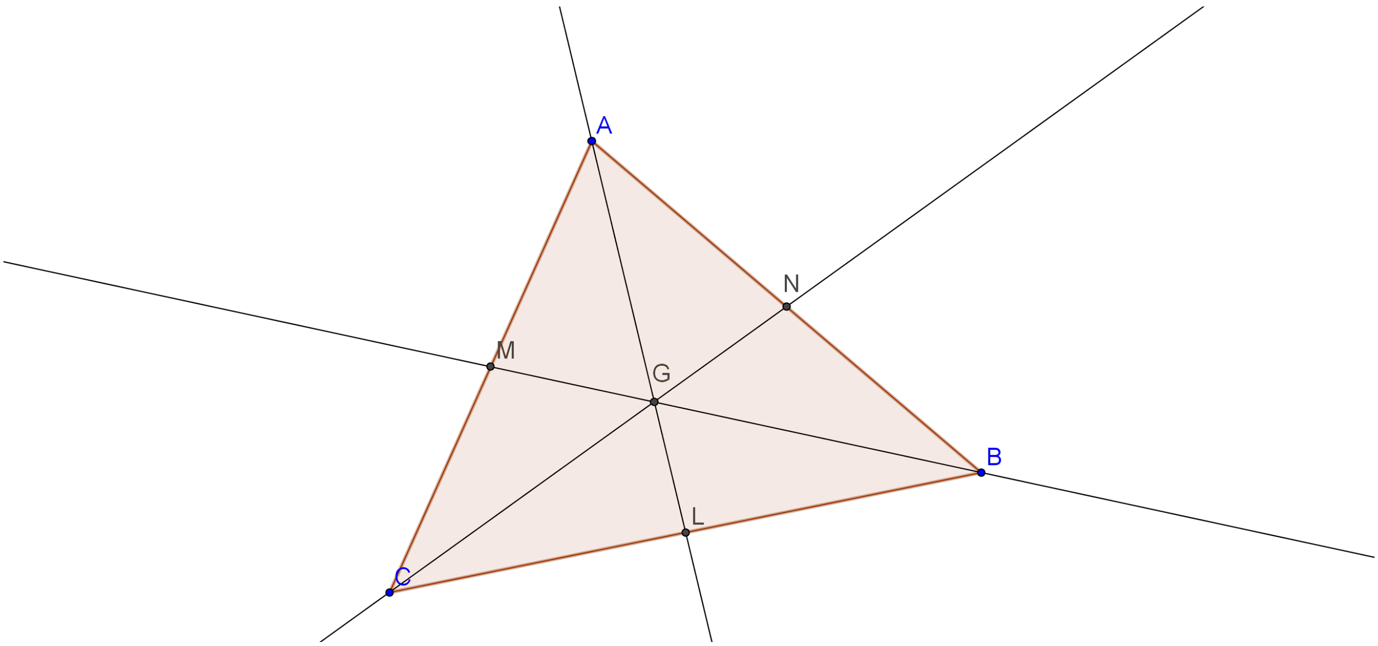
Teorema 1.8. *As três medianas de um triângulo $[ABC]$ são concorrentes num ponto G, designado baricentro do triângulo $[ABC]$.*

Demonstração. Para provar a concorrência das mediatrizes, utilizámos a definição da mediatriz de $[AB]$ como o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância de A e B. Para provar a concorrência das bissectrizes, caracterizámos a bissectriz de $\angle BCA$ como o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância das *rectas* AC e BC. Precisamos de procurar uma simetria deste tipo nas medianas!

E aqui a temos:

Proposição 1.9. *A A-mediana é o lugar geométrico dos pontos X tais que a área do triângulo $[AXB]$ é igual à área do triângulo $[AXC]$.*

Mais uma vez, não provaremos aqui esta proposição: a prova ficará como exercício ao leitor. Mas, com ela, a prova da existência do baricentro é quase imediata. Seja G o ponto de intersecção da A-mediana e da B-mediana. Então as áreas de $[AGB]$ e $[AGC]$ são iguais, e as áreas dos triângulos $[AGB]$ e $[BGC]$ são iguais, pelo que as áreas de $[AGC]$ e $[BGC]$ são iguais, e, assim, G pertence à C-mediana, como pretendido. □



Temos ainda a

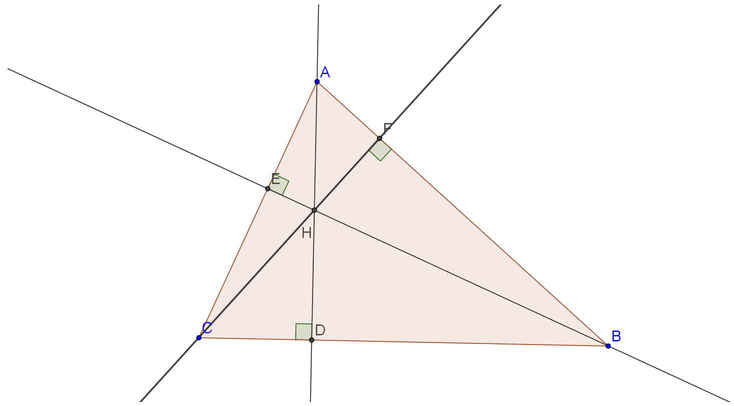
Proposição 1.10. *Sejam L, M, N os pontos médios dos lados $[BC]$, $[CA]$ e $[AB]$, respectivamente. Então* $\frac{\overline{LG}}{\overline{LA}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NG}}{\overline{NC}} = \frac{1}{3}$.

Demonstração. A recta LN é paralela a AC e $\frac{\overline{LN}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$ (porquê?), logo os triângulos $[GLN]$ e $[GAC]$ são semelhantes e $\frac{\overline{LG}}{\overline{AG}} = \frac{1}{2}$. Daqui é fácil concluir que $\frac{\overline{LG}}{\overline{LA}} = \frac{1}{3}$, e as outras igualdades provam-se analogamente. □

1.5 Ortocentro

Por fim, chegámos ao último ponto que abordaremos nesta secção. O ortocentro do triângulo é o ponto de intersecção das suas alturas.

Não provaremos já a existência deste ponto, mas prometemos uma prova até ao fim do artigo.



2 Angle-chasing

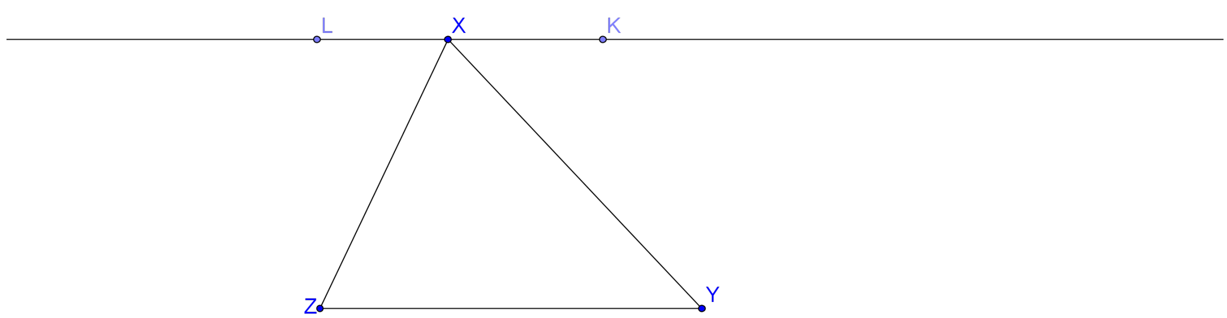
2.1 Calculando ângulos

Calcular ângulos é uma das principais ideias-chave em geometria. Muitos problemas, principalmente entre os mais fáceis, podem essencialmente ser resolvidos apenas trabalhando as relações entre os ângulos da figura!

Mas então como se calculam ângulos? Bem, nunca é demais recordar o seguinte teorema fundamental:

Teorema 2.1 (Soma dos ângulos internos de um triângulo)**.** *Seja* $[XYZ]$ *um triângulo. Então* $Z\widehat{X}Y + X\widehat{Y}Z + Y\widehat{Z}X = 180°$.

Demonstração. Consideramos uma recta paralela a YZ que passa por X, e pontos K e L sobre essa recta como na figura seguinte:



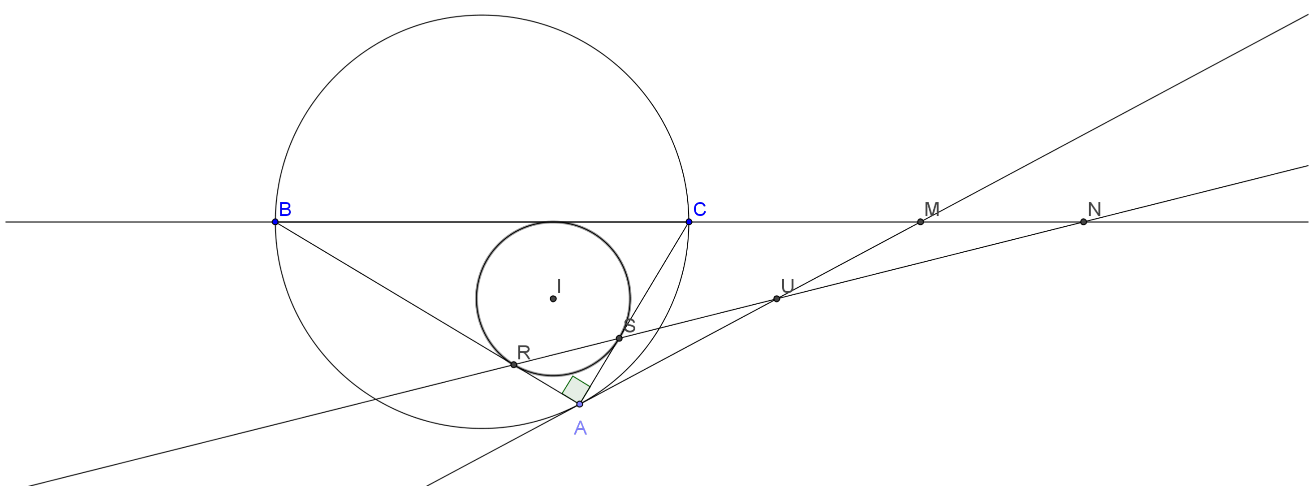
Então, pelo paralelismo, $X\widehat{Y}Z = Y\widehat{X}K$ e $Y\widehat{Z}X = L\widehat{X}Z$, pelo que $Z\widehat{X}Y + X\widehat{Y}Z + Y\widehat{Z}X = Z\widehat{X}Y + Y\widehat{X}K + L\widehat{X}Z = 180°$. □

Alguns problemas (mas não muitos!) podem ser resolvidos apenas utilizando este teorema várias vezes, ou seja, calculando directamente todos os ângulos da figura. Vamos a um exemplo.

Problema 1 (Ibero 2006). *Seja $[ABC]$ um triângulo escaleno* [2] *com $C\widehat{A}B = 90°$. A recta tangente em A à circunferência circunscrita intersecta BC em M. A circunferência inscrita é tangente a AB em R e a AC em S. As rectas RS e BC intersectam-se em N, e as rectas RS e AM intersectam-se em U.*

Prova que o triângulo $[UMN]$ é isósceles.

Como começar? Bem, como em qualquer problema de geometria, o primeiro passo é construir um desenho grande e bem feito, se possível com régua e compasso:



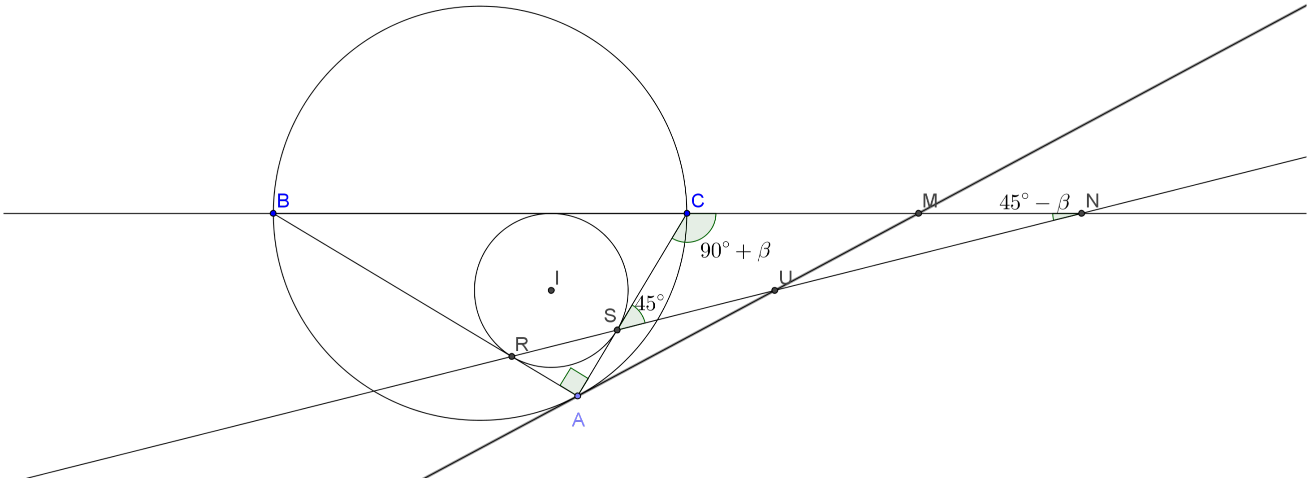
E agora? Bem, olhando atentamente para a figura, podemos facilmente conjecturar que o par de lados iguais de $[UMN]$ é $[MU]$ e $[MN]$. Então vamos provar que $\overline{MU} = \overline{MN}$. Para isso, vamos tentar calcular os ângulos $M\widehat{N}U$ e $N\widehat{U}M$.

Para o primeiro, notemos que $M\widehat{N}U = C\widehat{N}S$; para calcular este ângulo, basta-nos conhecer $N\widehat{S}C$ e $S\widehat{C}N$. Observe-se então que $N\widehat{S}C = R\widehat{S}A$; como $S\widehat{A}R = 90°$ e $\overline{AR} = \overline{AS}$, temos $R\widehat{S}A = 45°$ e assim $N\widehat{S}C = 45°$. Por outro lado, $S\widehat{C}N = 180° - \gamma = 180° - (90° - \beta) = 90° + \beta$. Assim,

$$M\widehat{N}U = C\widehat{N}S = 180° - 45° - (90° + \beta) = 45° - \beta$$

E agora, como calcular $N\widehat{U}M$? Podemos observar que $N\widehat{U}M = S\widehat{U}A$ e podemos tentar utilizar o triângulo $[ASU]$. De facto, conhecemos $A\widehat{S}U = 135°$. Mas, como calcular $U\widehat{A}S$?

[2] O leitor poderá tentar posteriormente provar este resultado sem a condição $C\widehat{A}B = 90°$.

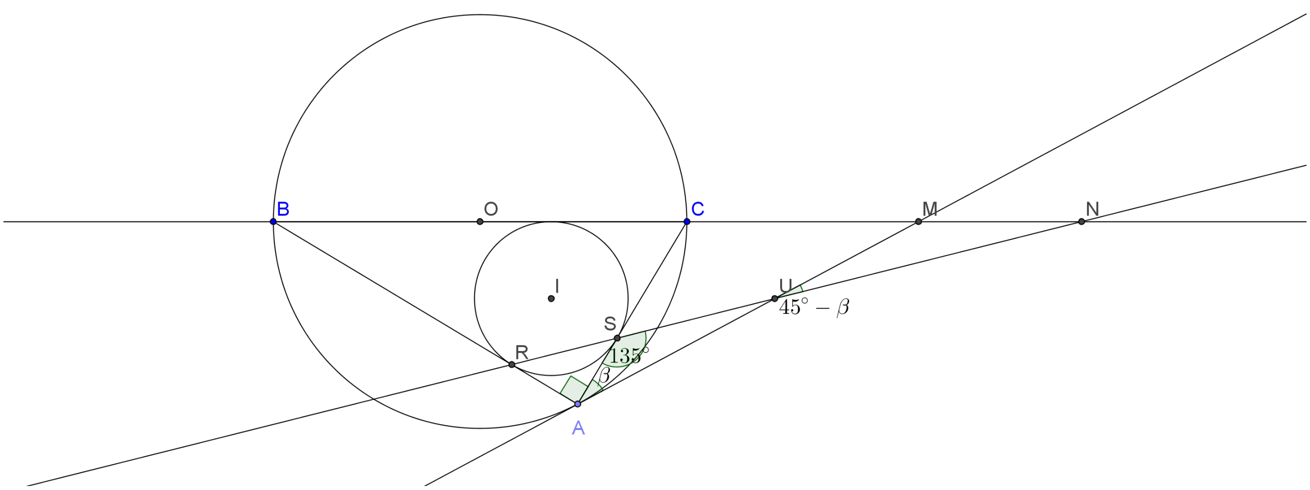


Sabemos que a recta AU é perpendicular à recta OA, onde O é o centro da circunferência circunscrita. Precisamos, assim, de calcular $C\widehat{A}O$; como $\overline{OA} = \overline{OC}$, basta-nos calcular $A\widehat{O}C$. Parece ser, portanto, boa ocasião para introduzir/relembrar o muito útil Teorema do Arco Capaz, que nos dá $A\widehat{O}C = 2 \cdot A\widehat{B}C = 2\beta$.

Teorema 2.2 (Arco Capaz)**.** *Seja O o circuncentro do triângulo $[ABC]$. Então $A\widehat{O}C = 2 \cdot A\widehat{B}C$.*

Demonstração. Tem-se $A\widehat{B}C = A\widehat{B}O + O\widehat{B}C = \frac{180° - B\widehat{O}A}{2} + \frac{180° - A\widehat{O}C}{2} = 180° - \frac{360° - C\widehat{O}B}{2}$, o que equivale ao pretendido. □

Note-se que, como $C\widehat{A}B = 90°$, $C\widehat{O}B = 2 \cdot 90° = 180°$ e assim O está no segmento $[BC]$, sendo o seu ponto médio.



Mas já temos suficiente informação de ângulos para concluir o problema. Temos $A\widehat{O}C = 2\beta$ e $\overline{OA} = \overline{OC}$, logo $C\widehat{A}O = 90° - \beta$. Assim, $U\widehat{A}S = \beta$. Por fim,

$$N\widehat{U}M = S\widehat{U}A = 180° - 135° - \beta = 45° - \beta$$

e assim $M\widehat{N}U = N\widehat{U}M$, logo $\overline{MN} = \overline{MU}$ e o problema está terminado!

Esta solução poderá ter parecido mais "complicada" do que deveria devido à introdução a meio do Teorema do Arco Capaz, para aqueles que não são familiares com este Teorema. Contudo, numa futura ocasião, calcular ângulos envolvendo o centro e/ou tangentes não oferecerá tanta resistência. O tema dos ângulos com rectas tangentes sera, aliás, sistematizado mais tarde.

Tente agora o leitor resolver por si o problema seguinte:

Problema 2 (OMayo). *Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo com $\overline{AB} = \overline{AC}$, e seja M o ponto médio de $[BC]$. Seja P um ponto na mediatriz de $[AC]$ que pertence ao semiplano definido por BC que não contém A. As rectas CP e AM intersectam-se em Q. Determina os ângulos formados pelas rectas AP e BQ. (Sugestão: começa por chamar "nomes" aos ângulos que definem a figura. Nota que a construção dá origem a muitos triângulos isósceles, o que poderá ajudar a calcular ângulos em função dos iniciais.)*

Alguns leitores já se estarão, com certeza, a perguntar: mas como sei se os ângulos do problema são "calculáveis" ou não? A verdade é que não existe uma resposta absoluta a essa pergunta e é necessário desenvolver uma grande intuição (que se ganha resolvendo muitos, muitos problemas!) para "aprender" quando e como se podem calcular ângulos desta forma. Qualquer olímpico experiente sabe, por exemplo, que, em geral, ângulos envolvendo pontos médios não são directamente calculáveis sem o auxílio de trigonometria "feia".

Em geral, é uma boa prática começar, em qualquer problema de geometria, por calcular todos os ângulos possíveis.

Às vezes há certas propriedades das configurações que transformam ângulos aparentemente não calculáveis em ângulos facilmente calculáveis. Vejamos alguns exemplos.

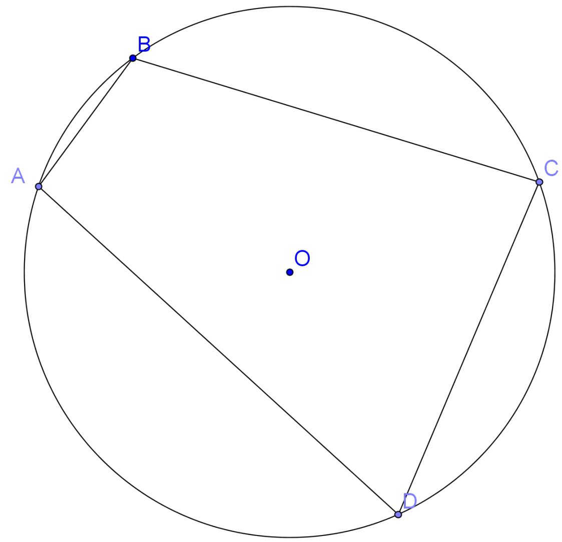
2.2 Quadriláteros cíclicos

Definição 2.3. *Um quadrilátero diz-se* cíclico *ou* inscritível *se existe uma circunferência que passa pelos seus quatro vértices.*

Qual o interesse desta definição? A princípio, podemos, por exemplo, tentar encontrar critérios para a ciclicidade de quadriláteros:

Teorema 2.4. *Seja $[ABCD]$ um quadrilátero convexo. Então $[ABCD]$ é cíclico se e só se $A\widehat{B}C + C\widehat{D}A = 180°$.*

Demonstração. Provaremos apenas o "só se"; o "se" fica como exercício ao leitor. Suponhamos que $[ABCD]$ é cíclico e seja O o seu circuncentro.

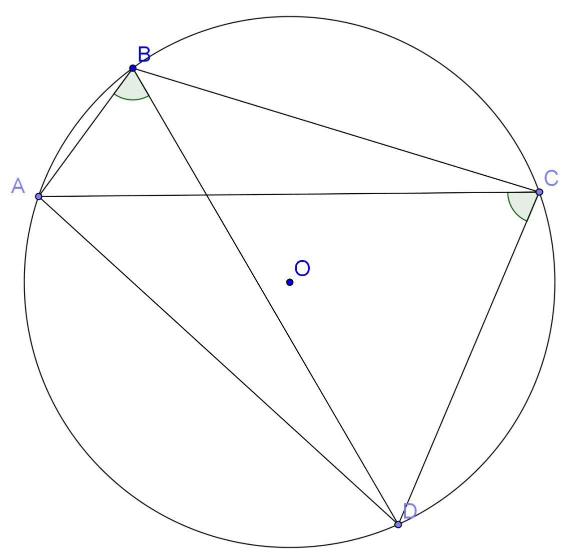


Observando a figura anterior, temos que, pelo Teorema do Arco Capaz, $C\widehat{O}A = 2 \cdot C\widehat{D}A$; e $360° - C\widehat{O}A = 2 \cdot A\widehat{B}C$. Assim, $2 \cdot A\widehat{B}C + 2 \cdot C\widehat{D}A = 360°$, logo $A\widehat{B}C + C\widehat{D}A = 180°$.

□

Parece interessante, mas não é a única forma agradável de caracterizar quadriláteros cíclicos. Temos também o

Teorema 2.5. *Seja* $[ABCD]$ *um quadrilátero convexo. Então* $[ABCD]$ *é ciclico se e só se* $A\widehat{B}C = A\widehat{C}D$.



Demonstração. Mais uma vez, provaremos apenas o "só se".

Seja O o circuncentro de $[ABCD]$; então $A\widehat{B}D = \frac{1}{2} \cdot A\widehat{O}D = A\widehat{C}D$.

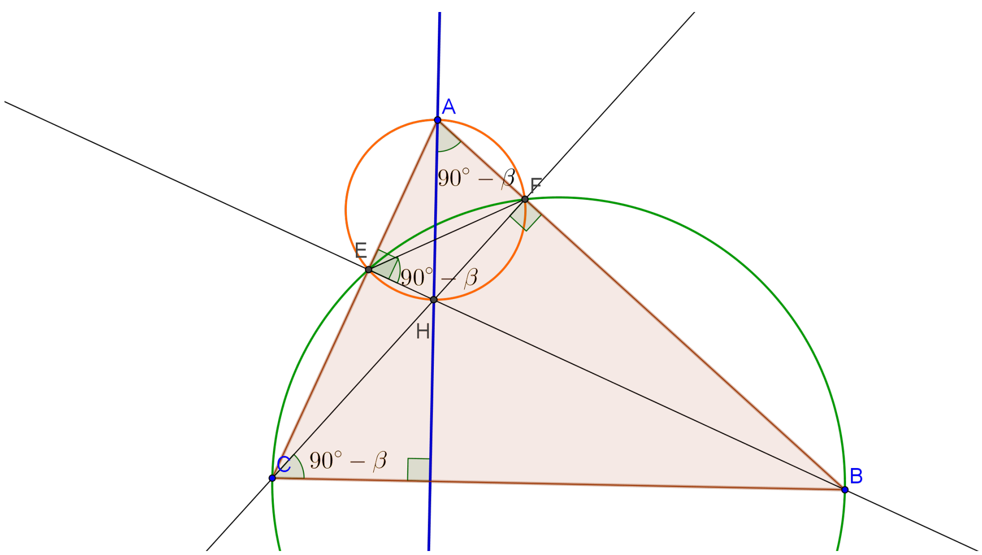
□

Então temos duas formas diferentes de caracterizar quadriláteros cíclicos![3] Aquilo que nos vai interessar, na maior parte das vezes, não será o aspecto da ciclicidade em si, mas o facto de estas duas condições serem equivalentes. Mais concretamente: se $A\widehat{B}C + C\widehat{D}A = 180°$, então $[ABCD]$ é cíclico, logo $A\widehat{B}D = A\widehat{C}D$, e, além disso, $B\widehat{C}A = B\widehat{D}A$. Ou seja, a partir de uma relação de ângulos ganhamos logo outras duas gratuitamente! Por vezes, ângulos que, inicialmente, não parecem calculáveis são na realidade calculáveis devido a um quadrilátero cíclico.

Para exemplificar, vamos dar a prometida prova da existência do ortocentro.

Teorema 2.6. *Seja $[ABC]$ um triângulo, e sejam D, E e F os pés das perpendiculares traçadas por A, B, C sobre BC, AC e AB, respectivamente. Então AD, BE e CF intersectam-se num ponto.*

Demonstração. Seja H o ponto de intersecção das rectas BE e CF. Queremos provar que AH é perpendicular a BC. Ou seja, queremos calcular o ângulo entre as rectas AH e BC; aquilo que queremos provar é, também, equivalente a $H\widehat{A}B = 90° - \beta$. Mas como podemos calcular $H\widehat{A}B$? Desta vez não temos nenhum triângulo que tenha $\angle HAB$ como um dos ângulos internos e do qual saibamos as amplitudes dos outros dois.



É aqui que os quadriláteros cíclicos entram. Note-se que $A\widehat{F}H = H\widehat{E}A = 90°$, logo $A\widehat{F}H + H\widehat{E}A = 180°$ e portanto o quadrilátero $[AFHE]$ é cíclico. Então temos

$$H\widehat{A}B = H\widehat{A}F = H\widehat{E}F = B\widehat{E}F$$

[3] Do ponto de vista de ângulos orientados, estes dois teoremas são, na verdade, o mesmo.

e só precisamos de calcular $B\widehat{E}F$.

Mais uma vez, o ângulo, à primeira vista, não é calculável; mas mais um quadrilátero cíclico vem fazer a sua magia! Note-se que $C\widehat{E}B = C\widehat{F}B = 90°$, logo $[BCEF]$ é cíclico e assim temos

$$B\widehat{E}F = B\widehat{C}F$$

e é evidente, já que CF é perpendicular a AB, que $B\widehat{C}F = 90° - \beta$, e o nosso teorema está provado! □

É de notar que os quadriláteros cíclicos encontrados durante a prova deste resultado são frequentemente úteis para calcular ângulos envolvendo o ortocentro e os pés das alturas.

Vamos continuar com mais um exemplo.

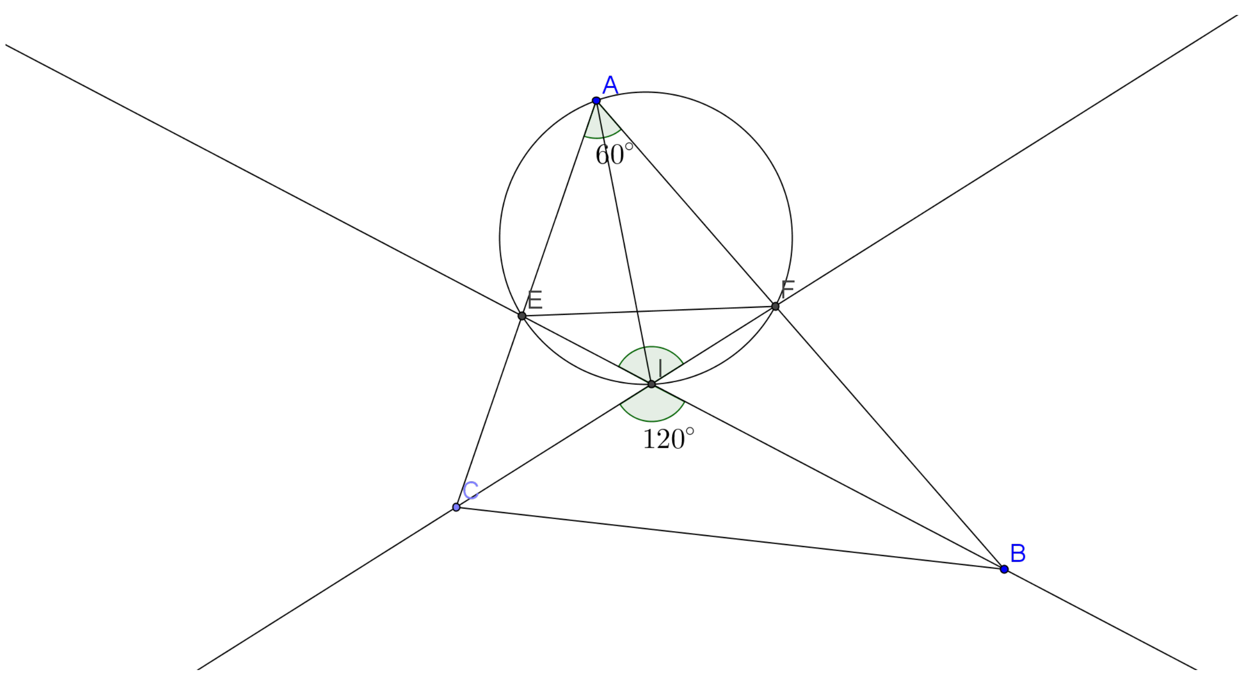
Problema 3. *No triângulo $[ABC]$, $C\widehat{A}B = 60°$. As bissectrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCA$ intersectam os lados $[AC]$ e $[BC]$ em E e F, respectivamente. Seja I o incentro de $[ABC]$. Prova que $\overline{IE} = \overline{IF}$.*

O que fazer? Seria útil calcular $I\widehat{E}F$ e $E\widehat{F}I$; estes ângulos não são directamente calculáveis, mas podemos conjecturar que o quadrilátero $[AFIE]$ é cíclico com uma boa figura (ou vendo que isto implica facilmente o que se quer provar). Então vamos provar essa ciclicidade.

Só precisamos de calcular $F\widehat{I}E = C\widehat{I}B$; ora,

$$C\widehat{I}B = 180° - I\widehat{B}C - B\widehat{C}I = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 180° - \frac{180° - 60°}{2} = 120°$$

e assim $E\widehat{A}F + F\widehat{I}E = 60° + 120° = 180°$, pelo que $[AFIE]$ é cíclico.



Para concluir o problema, observe-se que

$$I\widehat{E}F = I\widehat{A}F = \frac{\alpha}{2}$$

e analogamente $E\widehat{F}I = \frac{\alpha}{2}$, logo $I\widehat{E}F = E\widehat{F}I$ e assim $\overline{IE} = \overline{IF}$, e o problema está terminado.

Note-se que o problema anterior nos levou a uma observação relativamente simples mas bastante importante: se, num triângulo $[ABC]$ (que corresponde ao triângulo $[AEF]$ do exemplo anterior), a bissectriz de $\angle CAB$ intersecta a circunferência circunscrita no ponto P, então $\overline{PB} = \overline{PC}$. Ou seja, P está na mediatriz de $[BC]$; e, se $\overline{AB} \neq \overline{AC}$, então a intersecção da mediatriz de $[BC]$ e da bissectriz de $\angle CAB$ é um único ponto. Assim, temos o seguinte

Facto 2.7. *Seja $[ABC]$ um triângulo com $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Então a bissectriz de $\angle CAB$ e a mediatriz de $[BC]$ intersectam-se num único ponto P que está sobre a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.*

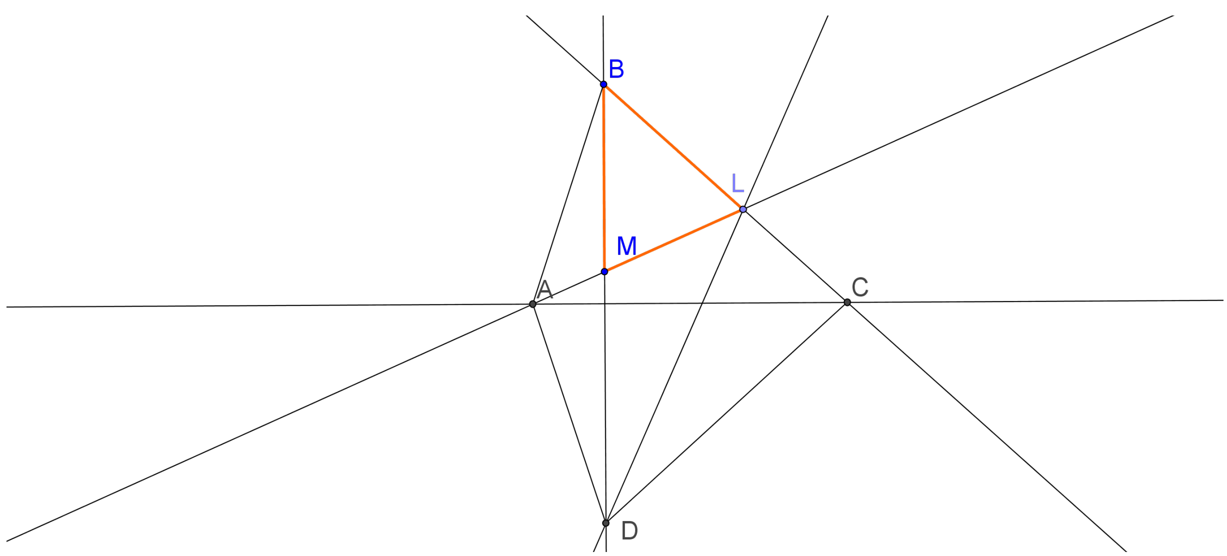
E vamos a mais um exemplo, desta vez da Olimpíada Rioplatense.

Problema 4 (Rioplatense 2006)**.** *Seja $[ABCD]$ um quadrilátero convexo com $\overline{AB} = \overline{AD}$ e $\overline{BC} = \overline{CD}$. A bissectriz de $\angle CDB$ intersecta BC em L e a recta AL intersecta BD em M. Sabe-se que $\overline{BM} = \overline{BL}$. Determina o valor de*

$$2 \cdot D\widehat{A}B + 3 \cdot B\widehat{C}D.$$

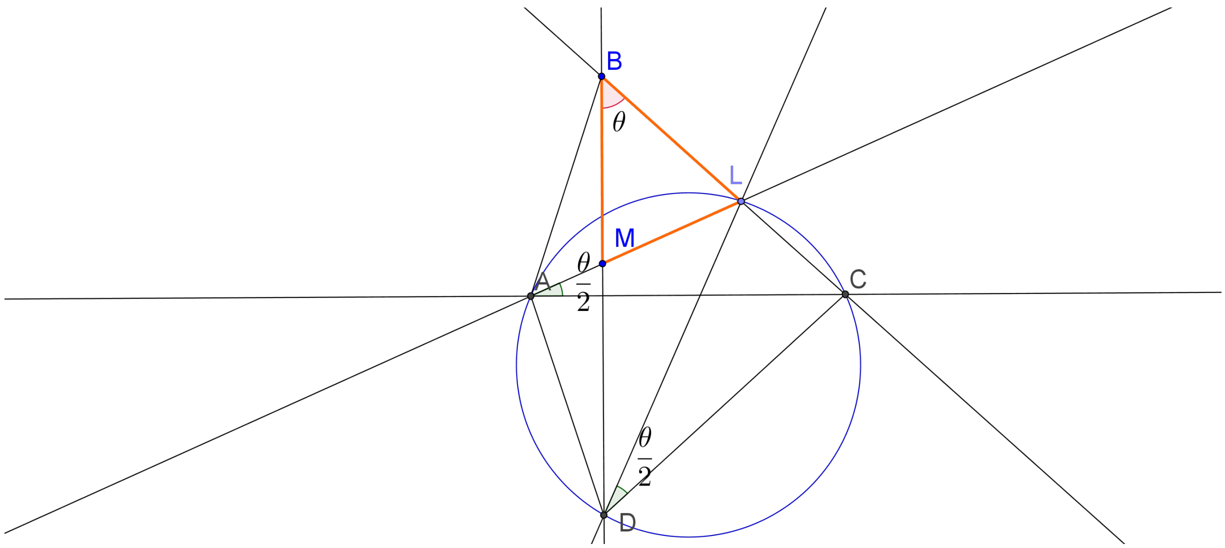
Primeiro: como fazer o desenho do problema? Como construir o quadrilátero $[ABCD]$ de modo que $\overline{BM} = \overline{BL}$? Ter um bom desenho é, como sempre, muito importante para fazer conjecturas valiosas.

O truque, neste caso, será construir a figura **a partir do triângulo** $[BLM]$.



Note-se que o triângulo $[BLM]$ define a figura toda: se construirmos $[BLM]$ com $\overline{BM} = \overline{BL}$, podemos de seguida construir D em BM de com $L\widehat{D}M = \frac{1}{2} \cdot M\widehat{B}L$ (de facto, note-se que $L\widehat{D}M = \frac{1}{2} \cdot C\widehat{D}B = \frac{1}{2} \cdot D\widehat{B}C = \frac{1}{2} \cdot M\widehat{B}L$) e construir C como a intersecção de BL com a mediatriz de $[BD]$; e ainda construir A como a intersecção de ML com essa mesma mediatriz. Assim, o triângulo $[BLM]$ determina toda a restante figura.

Então seja $\theta = M\widehat{B}L$. Temos assim $L\widehat{M}B = B\widehat{L}M = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$. Temos também $B\widehat{C}D = 180° - 2\theta$, já que $C\widehat{D}B = \theta$. Mas, como calcular $D\widehat{A}B$?



Calculemos mais ângulos: temos $C\widehat{A}L = C\widehat{A}M = 90° - L\widehat{M}B = 90° - (90° - \frac{\theta}{2}) = \frac{\theta}{2}$ (note-se que AC é perpendicular a BD). Isto é sugestivo, pois sabemos também que $C\widehat{D}L = \frac{\theta}{2}$! Temos assim que $[ALCD]$ é cíclico, e, como veremos, isso será suficiente para calcular os ângulos que faltam e concluir o problema.

Portanto, temos

$$D\widehat{A}C = D\widehat{L}C = 180° - L\widehat{C}D - C\widehat{D}L = 180° - (180° - 2\theta) - \frac{\theta}{2} = \frac{3\theta}{2}$$

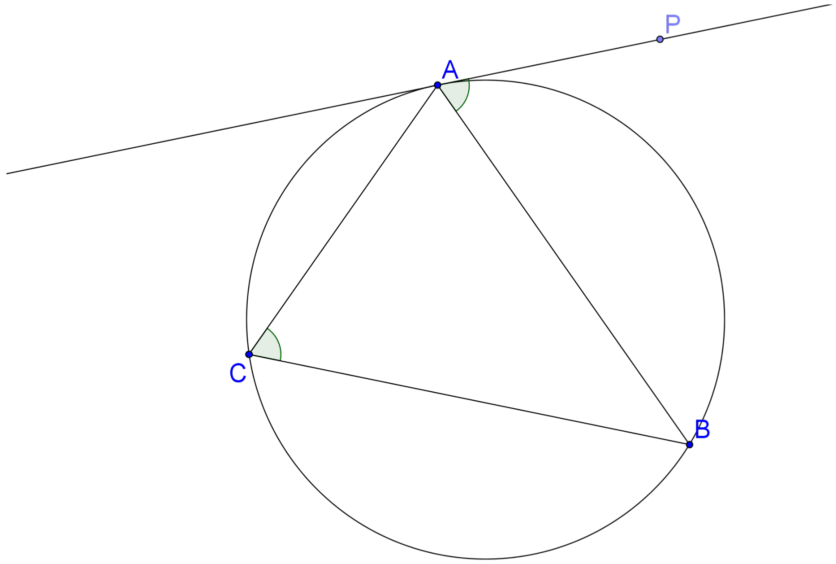
e, por simetria, $C\widehat{A}B = \frac{3\theta}{2}$ também, e assim $D\widehat{A}B = 3\theta$. Assim,

$$2 \cdot D\widehat{A}B + 3 \cdot B\widehat{C}D = 2 \cdot 3\theta + 3 \cdot (180° - 2\theta) = 540°$$

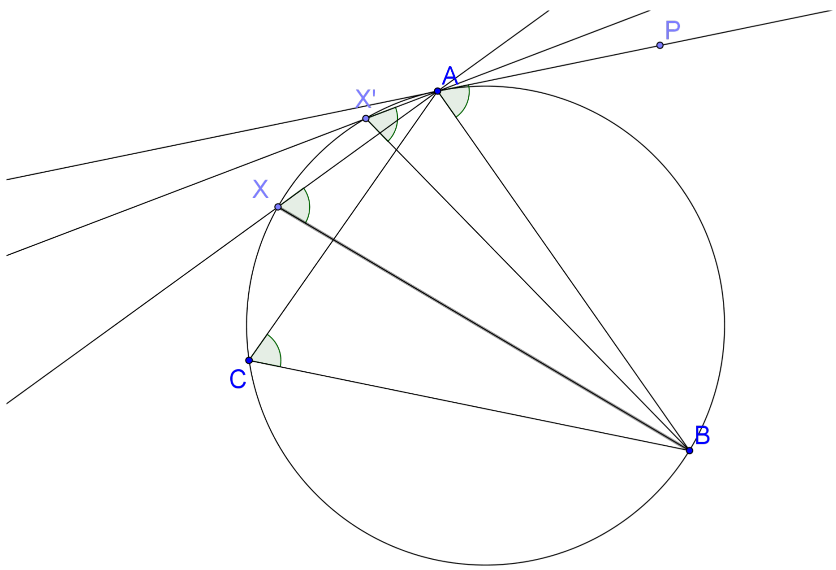
e esta é a resposta ao problema.

Antes de passarmos aos problemas propostos, vamos apresentar um último facto útil sobre ângulos em circunferências.

Teorema 2.8 (Arco Capaz Degenerado.)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo e seja l a recta tangente à sua circunferência circunscrita em A. Então o ângulo entre as rectas AB e l é igual ao ângulo entre as rectas BC e AC. Na figura seguinte, $B\widehat{A}P = B\widehat{C}A$.*



Demonstração. Vamos ver que este teorema não é mais do que um "caso limite" do 2.5. Consideremos um ponto X na circunferência circunscrita que se "aproxima" de A (ver figura).



Então temos $B\widehat{X}A = B\widehat{C}A$. Mas quando X se aproxima de A, a recta AX aproxima-se da recta tangente à circunferência circunscrita. Então, no limite, temos o pretendido. □

Note-se como o conhecimento prévio deste "caso degenerado" nos teria poupado uma "travagem" no Problema 1; de facto, se esse problema aparecesse agora, calcular $U\widehat{A}S$ já não ofereceria qualquer resistência!

Agora é a vez de praticar. Entre os problemas que se seguem, alguns são mais fáceis, outros mais difíceis; mas todos eles são resolúveis utilizando as técnicas aqui abordadas. Boas resoluções!

Problema 5 (OPP). *Seja $[ABC]$ um triângulo não rectângulo, I o seu incentro, O o seu circuncentro e Γ a sua circunferência circunscrita. A recta AI intersecta novamente Γ no ponto D. Seja E o ponto de intersecção das rectas AC e BD. Prova que os pontos E, C, O e B estão sobre uma mesma circunferência se e só se $\alpha = 2\beta$.*

Problema 6. *Seja $[ABCD]$ um quadrilátero, e seja P o ponto de intersecção de AB e CD. Supõe que as circunferências circunscritas aos triângulos $[PCB]$ e $[PDA]$ têm um ponto em comum $Q \neq P$. Prova que os triângulos $[QCB]$ e $[QDA]$ são semelhantes.*

Problema 7. *Seja $[ABC]$ um triângulo; as tangentes à sua circunferência circunscrita por A e por B intersectam-se em T. A recta que passa por T e é paralela a AC intersecta BC em D. Prova que $\overline{AD} = \overline{CD}$.*

Problema 8. *Seja $[ABC]$ um triângulo com $\angle CAB = 90°$. Constrói-se exteriormente ao triângulo um quadrado com $[BC]$ como um dos lados. Seja O o centro desse quadrado. Mostra que AO é a bissectriz do ângulo $\angle CAB$.*

Problema 9 (IMO Shortlist 2010). *Seja $[ABC]$ um triângulo e sejam D, E, F os pés das alturas traçadas por A, B, C, respectivamente. Uma das intersecções de EF com a circunferência circunscrita a $[ABC]$ é P. As rectas BP e DF intersectam-se em Q. Prova que $\overline{AP} = \overline{AQ}$.*

Problema 10 (OMayo 2009). *Seja $[ABCD]$ um quadrilátero tal que o triângulo $[ABD]$ é equilátero e o triângulo $[BCD]$ é isósceles, com $B\widehat{C}D = 90°$. Seja E o ponto médio de $[AD]$. Determina $C\widehat{E}D$.*

Problema 11 (Ibero 2001). *Seja $[ABC]$ um triângulo com incentro I. A circunferência inscrita em $[ABC]$ é tangente aos lados $[BC]$, $[CA]$ e $[AB]$ nos pontos X, Y e Z, respectivamente. As rectas BI e CI intersectam a recta YZ nos pontos P e Q, respectivamente. Supondo que $\overline{XP} = \overline{XQ}$, prova que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.*

Problema 12. *Seja $[ABCD]$ um quadrado com circunferência circunscrita Γ. Seja P um ponto no arco AB (que não contém C e D) de Γ. As rectas DP e AC intersectam-se em Q e as rectas CP e AB intersectam-se em R. Mostra que a recta QR é a bissectriz do ângulo $\angle BQP$.*

Problema 13 (IMO 2004). *Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo com $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. A circunferência de diâmetro $[BC]$ intersecta os lados $[AB]$ e $[AC]$ em M e N, respectivamente. Seja O o ponto médio de $[BC]$. As bissectrizes dos ângulos $\angle CAB$ e $\angle MON$ intersectam-se em R. Prova que as circunferências circunscritas aos triângulos $[BMR]$ e $[CNR]$ têm um ponto em comum no segmento $[BC]$.*

Problema 14 (Ibero 2013). *Sejam Γ uma circunferência de centro O, AE um diâmetro de Γ e B o ponto médio de um dos arcos definidos por AE. O ponto $D \neq E$ está sobre o segmento $[OE]$. O ponto C é tal que o quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo com AB paralela a CD e BC*

paralela a AD. As rectas EB e CD intersectam-se no ponto F. A recta OF corta o menor arco EB de Γ no ponto I. Demonstra que a recta EI é a bissectriz do ângulo $\angle BEC$.

Problema 15 (IMO 2012)**.** *Dado um triângulo $[ABC]$, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita é tangente ao lado $[BC]$ em M, e às rectas AB e AC em K e L, respectivamente. As rectas LM e BJ intersectam-se em F, e as rectas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de intersecção das rectas AF e BC, e seja T o ponto de intersecção das rectas AG e BC. Prova que M é o ponto médio de $[ST]$.*

*(*Nota: *A circunferência ex-inscrita de $[ABC]$ oposta ao vértice A é a circunferência tangente ao segmento $[BC]$, ao prolongamento do segmento $[AB]$ no sentido de A para B e ao prolongamento do segmento $[AC]$ no sentido de A para C. O seu centro está na bissectriz interna de $\angle CAB$ e nas bissectrizes dos ângulos externos em B e C.)*

Problema 16. *Seja $[ABC]$ um triângulo com ortocentro H e seja P um ponto na sua circunferência circunscrita. A recta que passa por A e é paralela a BP intersecta a recta CH em Q. A recta que passa por A e é paralela a CP intersecta a recta BH em R. Prova que a recta QR é paralela a AP.*

Problema 17 (IMO Shortlist 1996)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo com ortocentro H, e seja P um ponto na sua circunferência circunscrita, diferente de A, B e C. Seja E o pé da altura BH, e sejam Q e R pontos tais que $[PAQB]$ e $[PARC]$ são paralelogramos. As rectas AQ e HR intersectam-se em X. Prova que EX é paralela a AP.*

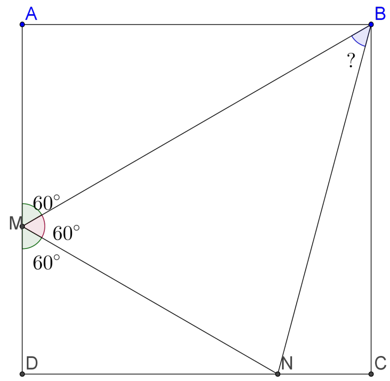
Problema 18 (Ibero 2014)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo e H o seu ortocentro. Seja D a intersecção da altura relativa a A com BC. Sejam M e N os pontos médios de $[BH]$ e $[CH]$ respectivamente. Sejam X e Y respectivamente os pontos de intersecção dos segmentos DM e DN com AB e AC, respectivamente. Se P é a intersecção de XY com BH e Q a intersecção de XY com CH, mostra que H, P, D, Q estão numa circunferência.*

2.3 Inventando pontos

Nem sempre existe o "quadrilátero cíclico milagroso" imediato que torna os ângulos calculáveis. Mas mesmo assim ângulos que não são directamente calculáveis conseguem por vezes ser calculados utilizando alguns truques engenhosos. Vamos mostrar alguns desses truques com os próximos exemplos.

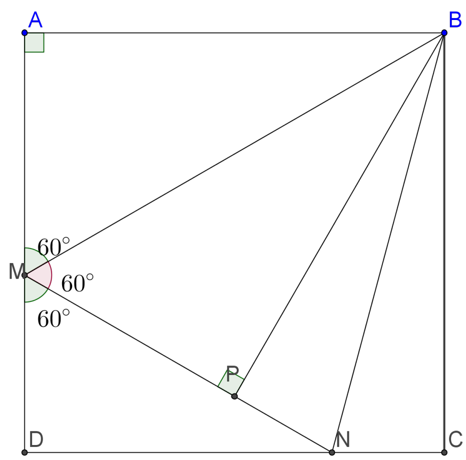
Problema 19 (Final das OPM 2014)**.** *No quadrado $[ABCD]$, sejam M um ponto de $[AD]$ e N um ponto de $[DC]$ tais que $B\widehat{M}A = N\widehat{M}D = 60°$. Calcula $M\widehat{B}N$.*

Comecemos com a já habitual figura:



O que fazer? Infelizmente nenhum quadrilátero na figura parece ser cíclico. Antes de mais nada, vamos utilizar a nossa figura bem feita para fazer uma conjectura sobre a resposta. Quanto "parece" medir o ângulo $\angle MBN$? Observando bem a figura, uma conjectura razoável parece ser $45°$. Vamos tentar provar essa conjectura.

Uma primeira observação é a de que $N\widehat{M}B = 60°$. Então MB é a bissectriz de $\angle NMA$. Como usar este facto? Vamos considerar o pé da perpendicular a MN por B:



Seja P esse ponto. Ficamos, assim, com dois triângulos congruentes: $[BPM]$ e $[BAM]$ (de facto, $P\widehat{M}B = A\widehat{M}B$ e $B\widehat{P}M = B\widehat{A}M = 90°$, e os dois triângulos têm o lado $[BM]$ em comum). Assim, temos que BM é a bissectriz de $\angle ABP$. Além disso, $\overline{BP} = \overline{BA}$. Mas temos $\overline{BA} = \overline{BC}$, logo $\overline{BP} = \overline{BC}$.

Assim, temos mais um par de triângulos congruentes: de facto, note-se que, como $\overline{BP} = \overline{BC}$, e $[BCN]$ e $[BPN]$ são dois triângulos rectângulos com a hipotenusa $[BN]$ em comum, os dois triângulos são congruentes. Então BN é a bissectriz do ângulo $\angle PBC$.

Então $M\widehat{B}P = \frac{1}{2} \cdot A\widehat{B}P$ e $P\widehat{B}N = \frac{1}{2} \cdot P\widehat{B}C$. Assim,

$$M\widehat{B}N = \frac{1}{2} \cdot A\widehat{B}P + \frac{1}{2} \cdot P\widehat{B}C = \frac{1}{2} \cdot A\widehat{B}C = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$$

e o problema acabou.

Note-se que a conjectura de que $M\widehat{B}N = 45°$ pode sugerir levemente procurar estas simetrias com as quais provámos que $M\widehat{B}N = \frac{1}{2} \cdot A\widehat{B}C$.

Vamos a mais um exemplo.

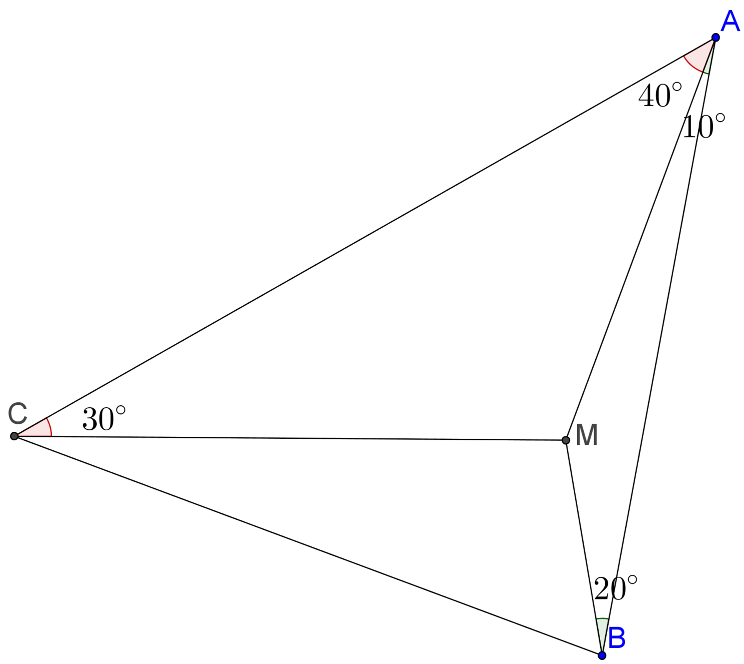
Problema 20 (USAMO 1996)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo. Um ponto M no interior de $[ABC]$ satisfaz*

$$M\widehat{A}B = 10°, M\widehat{B}A = 20°$$

$$M\widehat{A}C = 40°, M\widehat{C}A = 30°$$

Prova que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

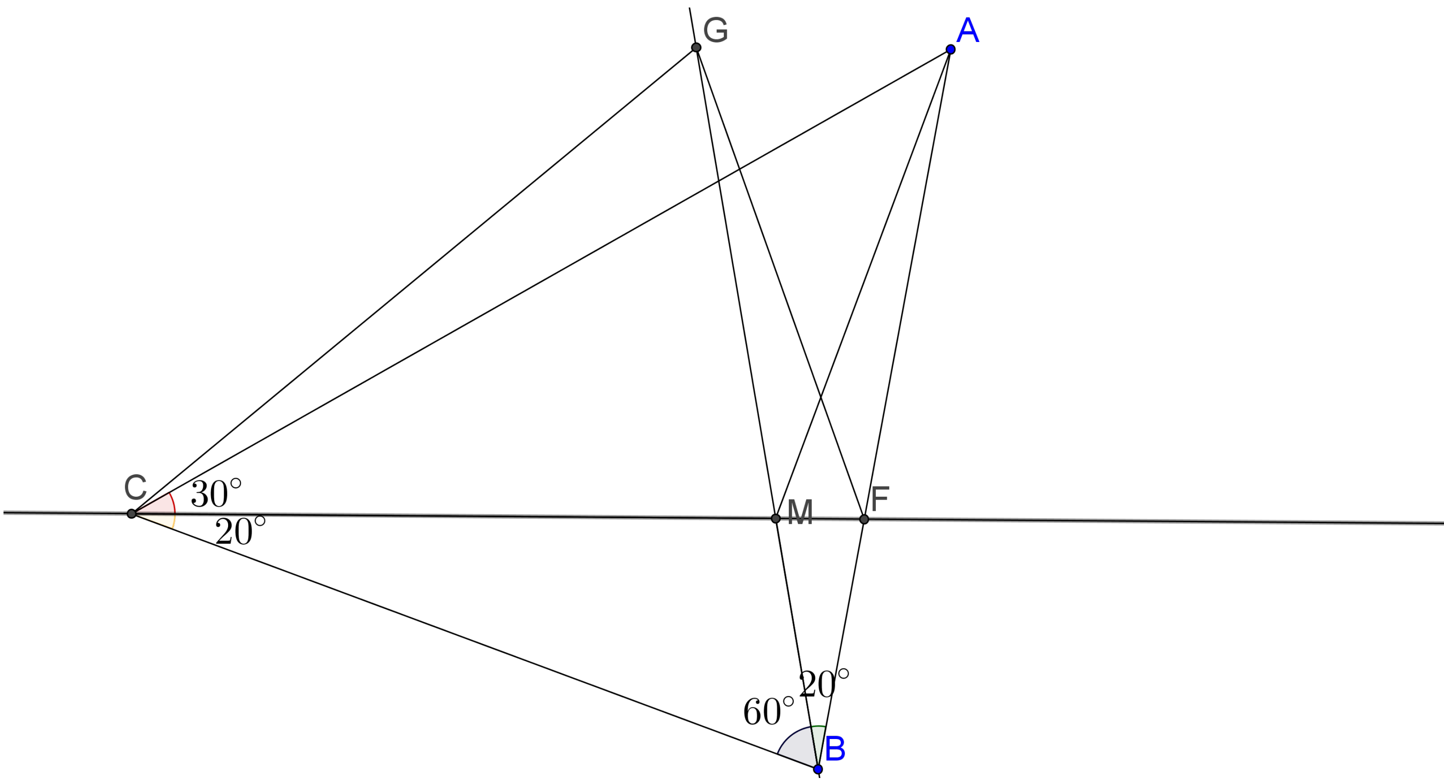
Mais uma vez, comecemos com um desenho:



Pela figura, é natural conjecturar que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Então vamos tentar prová-lo. Já sabemos que $C\widehat{A}B = 50°$; então queremos provar que $B\widehat{C}A = 50°$, ou seja, que $B\widehat{C}M = 20°$, ou equivalentemente que $A\widehat{B}C = 80°$, ou seja, que $M\widehat{B}C = 60°$.

Note-se que podemos resolver o problema "ao contrário": *supondo* que $\overline{AB} = \overline{BC}$, e que $B\widehat{C}A = 50°$, e ainda que $M\widehat{B}C = 60°$ e $B\widehat{C}M = 20°$; e *provando* que $M\widehat{A}B = 10°$. Daqui resultarão, evidentementemente, todas as outras igualdades de ângulos do enunciado; podemos fazer isto porque, obviamente, os dados do problema determinam os ângulos de $[ABC]$.

Vamos então provar esta versão recíproca do problema. Seja F o ponto de intersecção de CM e AB. Tem-se $F\widehat{B}C = 80°$ e $B\widehat{C}F = 20°$, logo $C\widehat{F}B = 80° = F\widehat{B}C$; logo, $\overline{CB} = \overline{CF}$.



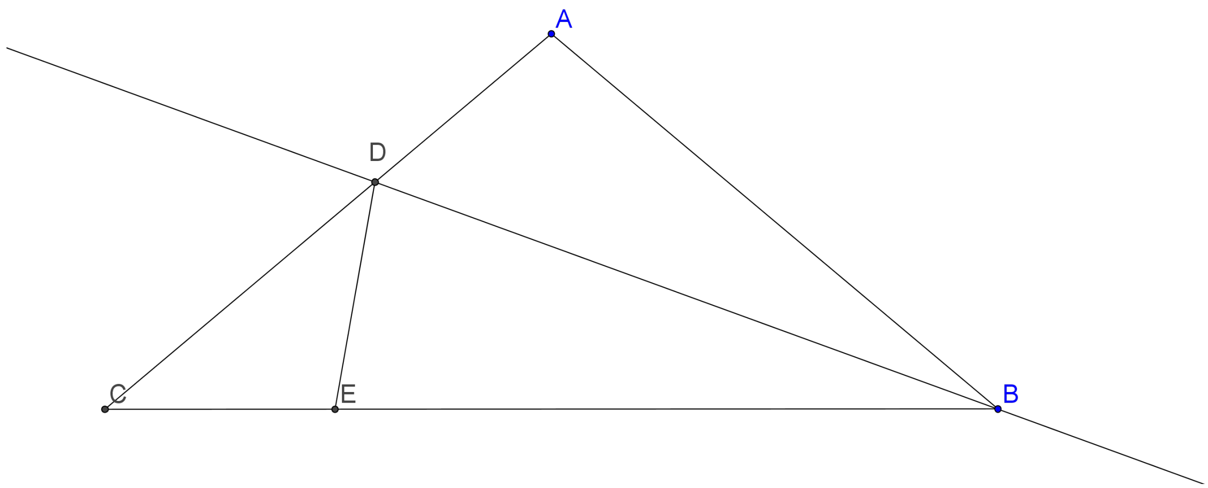
Tem-se $M\widehat{B}C = 60°$; esta igualdade é sugestiva, pois faz-nos pensar em triângulos equiláteros. De facto, seja G o ponto na recta BM (no sentido de B para M) tal que $\overline{BG} = \overline{BC}$. Então o triângulo $[BCG]$ é equilátero! Mais: como $F\widehat{B}M = 20°$ e $M\widehat{F}B = 80°$, temos $B\widehat{M}F = 80°$ e, portanto, $\overline{BM} = \overline{BF}$. Além disso, $\overline{BG} = \overline{BC}$ e $\overline{BC} = \overline{BA}$, logo $\overline{BG} = \overline{BA}$. Isto, por simetria, dá-nos que $M\widehat{A}F = M\widehat{G}F$ (observe-se que $[MGAF]$ é um trapézio isósceles).

Então queremos provar que $M\widehat{G}F = 10°$; mas note-se que $\overline{CG} = \overline{CB} = \overline{CF}$, e assim C é o circuncentro de $[GFB]$. Logo, pelo Teorema do Arco Capaz na circunferência circunscrita a $[GFB]$, temos $F\widehat{C}G = 2 \cdot F\widehat{B}G = 2 \cdot 20° = 40°$. Como $\overline{CF} = \overline{CG}$, temos $C\widehat{G}F = G\widehat{F}C = 70°$; e, por fim, $M\widehat{G}F = C\widehat{G}F - C\widehat{G}M = 70° - 60° = 10°$, e o problema está terminado!

Para terminar esta secção, vamos mostrar um exemplo envolvendo somas de comprimentos.

Problema 21 (2^{a} eliminatória das OPM 2009)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo tal que $A\widehat{B}C = B\widehat{C}A = 40°$ e D o ponto de intersecção da bissectriz de $\angle ABC$ com $[AC]$. Mostra que $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AD}$.*

Como trabalhar com esta soma de comprimentos? Simples: consideramos um ponto E no segmento $[BC]$ tal que $\overline{BE} = \overline{BD}$. Então queremos apenas provar que $\overline{CE} = \overline{AD}$!



Temos $D\widehat{B}E = 20°$, logo, como $\overline{BE} = \overline{BD}$, $B\widehat{E}D = 80°$. Além disso, de $A\widehat{B}C = B\widehat{C}A = 40°$ obtemos $D\widehat{A}B = C\widehat{A}B = 100°$; logo $D\widehat{A}B + B\widehat{E}D = 180°$, pelo que $[BEDA]$ é um quadrilátero cíclico. Como D está na bissectriz de $\angle ABE$, obtemos $\overline{AD} = \overline{DE}$.

Então apenas temos de provar que $\overline{DE} = \overline{CE}$. Mas isto é simples; como $B\widehat{E}D = 80°$, $D\widehat{E}C = 100°$, e, como $E\widehat{C}D = 40°$, obtemos $C\widehat{D}E = 40°$, logo $\overline{CE} = \overline{DE}$, como pretendido.

Por fim, um problema proposto:

Problema 22. *Seja $[ABC]$ um triângulo com incentro I. A bissectriz de $\angle ABC$ intersecta $[AC]$ em P. Prova que, se $\overline{AP} + \overline{AB} = \overline{BC}$, então $[API]$ é um triângulo isósceles.*

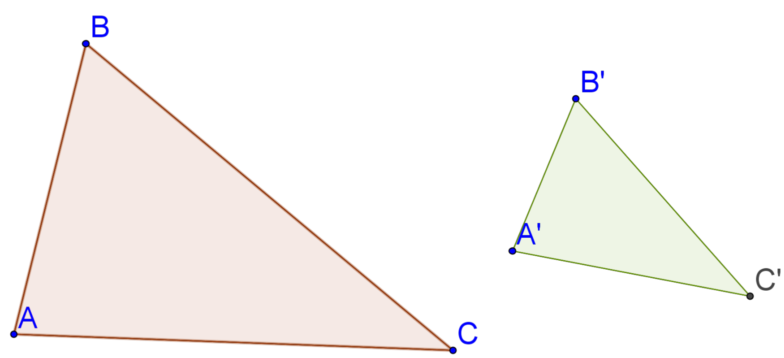
3 Manipulando Razões

Não faremos aqui uma abordagem muito profunda destes tópicos. No entanto, é sempre bom recordar as clássicas Semelhanças de Triângulos e o famoso Teorema da Bissectriz.

3.1 Semelhanças de Triângulos

Intuitivamente, dois triângulos são semelhantes se têm a mesma "forma". Mais precisamente,

Definição 3.1 (Triângulos Semelhantes)**.** *Dois triângulos* $[ABC]$ *e* $[A'B'C']$ *dizem-se* semelhantes *se os seus ângulos correspondentes são iguais, isto é, se* $C\widehat{A}B = C'\widehat{A'}B'$, $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$ *e* $B\widehat{C}A = B'\widehat{C'}A'$*. Esta relação é habitualmente representada por* $\sim$*; isto é, dizemos que* $[ABC] \sim [A'B'C']$*.*



Note-se, antes de mais, que, na definição anterior, **a ordem dos vértices interessa**: ou seja, dizer que $[ABC] \sim [A'B'C']$ **não** é o mesmo que dizer que $[ABC] \sim [B'C'A']$.

Note-se que, se os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ têm $C\widehat{A}B = C'\widehat{A'}B'$, $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$, então $B\widehat{C}A = B'\widehat{C'}A'$; ou seja, é suficiente que os triângulos verifiquem duas das igualdades referidas na definição para que verifiquem a terceira. Esta "suficiência" é conhecida como *Critério aa* (Ângulo-Ângulo). No entanto, há outras caracterizações interessantes de triângulos semelhantes:

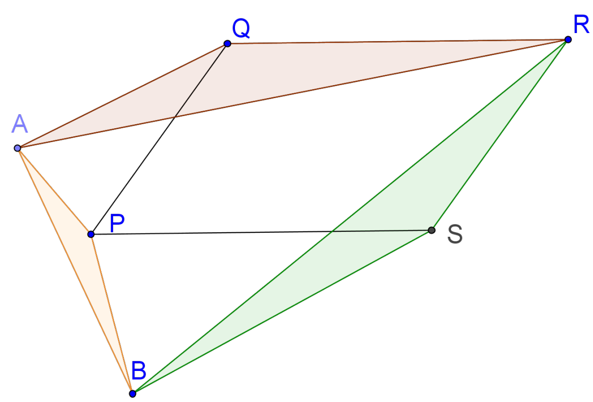
Proposição 3.2 (Critério lal)**.** *Dois triângulos* $[ABC]$ *e* $[A'B'C']$ *são semelhantes se e só se* $C\widehat{A}B = C'\widehat{A'}B'$ *e* $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$*.*

Proposição 3.3 (Critério lll)**.** *Dois triângulos* $[ABC]$ *e* $[A'B'C']$ *são semelhantes se e só se* $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$*. (Este valor chama-se* razão de semelhança*).*

A partir destes critérios podemos obter igualdades de ângulos a partir de igualdades de razões e vice-versa; e isto, por vezes, é muito útil. Vamos ver um exemplo.

Problema 23 (Holanda 2000)**.** *Seja $[PQRS]$ um paralelogramo. Exteriormente ao paralelogramo constroem-se triângulos semelhantes $[AQP]$ e $[BSP]$, de modo que $\overline{AQ} = \overline{PQ}$ e $\overline{BS} = \overline{PS}$. Prova que o triângulo $[ARB]$ também é semelhante a estes dois triângulos.*

Após olhar algum tempo para uma figura, as esperanças de calcular directamente todos os ângulos tornam-se diminutas. Note-se que queremos provar, pelo critério lal, que $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AB}}$ e $B\widehat{A}R = P\widehat{A}Q$. Ora, isto equivale a $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$ e $B\widehat{A}P = R\widehat{A}Q$. Ou seja, pelo critério lal, o que queremos provar é equivalente a que os triângulos $[BAP]$ e $[RAQ]$ sejam semelhantes!



Observe-se então que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QR}}$$

(a primeira igualdade resulta da semelhança do enunciado). E portanto, pelo critério lal, resta-nos provar que $A\widehat{P}B = A\widehat{Q}R$. Mas estes ângulos já são directamente calculáveis:

$$A\widehat{P}B = 360^\circ - Q\widehat{P}A - S\widehat{P}Q - B\widehat{P}S = 360^\circ - 2 \cdot Q\widehat{P}A - S\widehat{P}Q$$

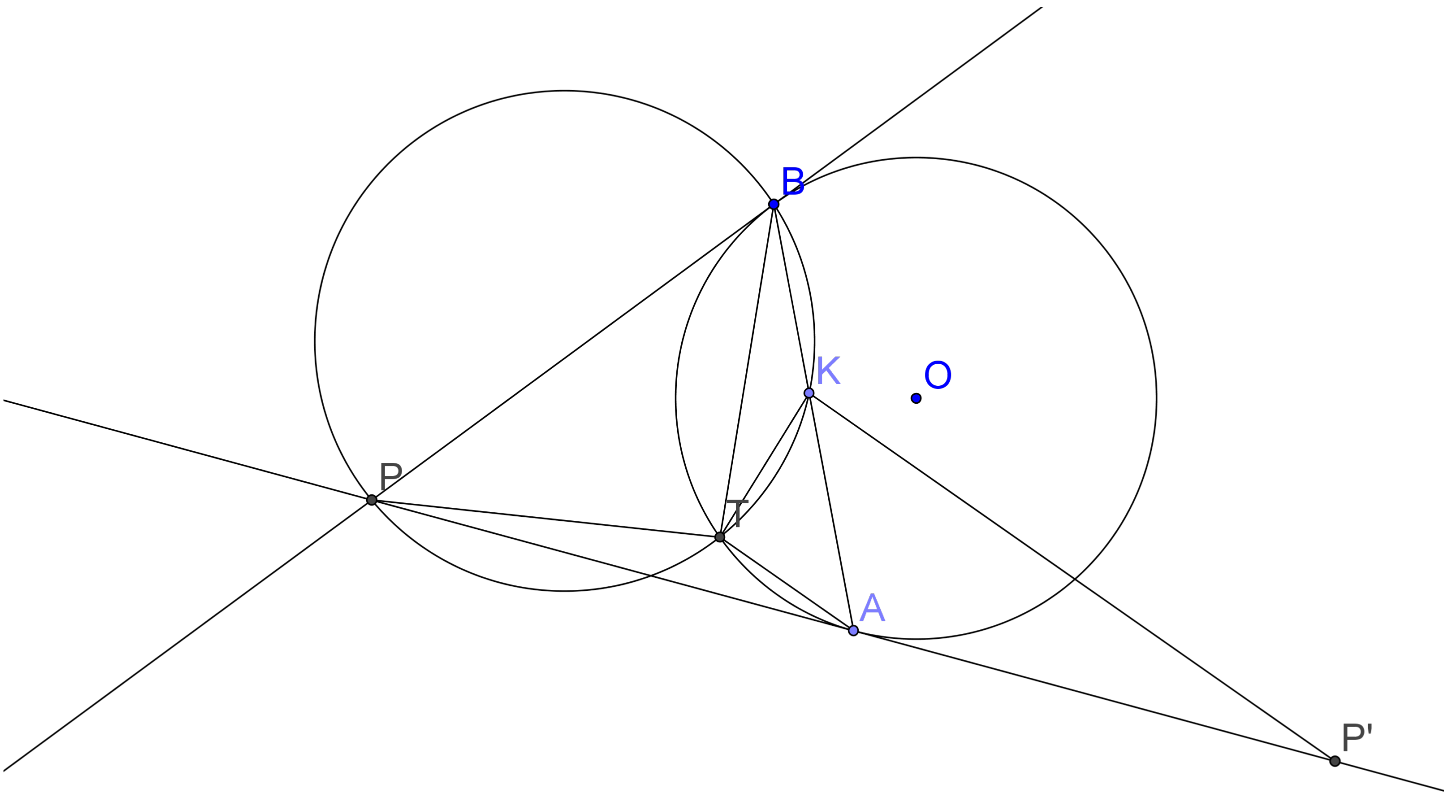
$$= 360^\circ - (180^\circ - A\widehat{Q}P) - (180^\circ - P\widehat{Q}R) = A\widehat{Q}P + P\widehat{Q}R = A\widehat{Q}R$$

e o problema terminou.

Vamos agora a um exemplo vindo do Médio Oriente:

Problema 24 (Irão 2013)**.** *Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência e seja P um ponto no exterior de $\mathcal{C}$. As tangentes a $\mathcal{C}$ por P intersectam $\mathcal{C}$ em A e B. Seja K um ponto no segmento $[AB]$, e seja T o ponto de intersecção, diferente de B, da circunferência circunscrita a $[PKB]$ com $\mathcal{C}$. Seja P' o ponto na recta $[AP]$ tal que A é o ponto médio de $[PP']$. Prova que*

$$P\widehat{B}T = P'\widehat{K}A.$$



Como começar? O ângulo $P\widehat{B}T$ já parece difícil de trabalhar; mas o ângulo $P'\widehat{K}A$, que envolve um ponto médio, é simplesmente assustador. Mas a verdade é que, embora pontos médios sejam pouco propícios a angle-chasing "trivial", são bastante bons para trabalhar com semelhanças. Em particular, *talvez* o triângulo $[P'KA]$ seja semelhante a algum outro triângulo na figura e isso resolva o problema - o que nos daria muito jeito, pois passaríamos a ter apenas de lidar com igualdades de razões, algo muito mais prático quando o ponto P' está envolvido.

Olhando para a figura, é razoável conjecturar que $[P'KA] \sim [BAT]$. Primeiro: será que isto implica o que queremos provar? Claro que sim, pois, por Arco Capaz Degenerado, $P\widehat{B}T = B\widehat{A}T$! Então vamos tentar prová-lo. Temos, sendo O o centro de $\mathcal{C}$, $A\widehat{T}B = 180° - \frac{1}{2} \cdot B\widehat{O}A$, e, como $[PBOA]$ é cíclico (pois $P\widehat{B}O = O\widehat{A}P = 90°$), temos $A\widehat{T}B = 180° - \frac{1}{2} \cdot (180° - A\widehat{P}B) = 180° - K\widehat{A}P = K\widehat{A}P'$. (Recorde-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$.)

Falta só, então, provar que $\frac{\overline{AK}}{\overline{AP'}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{TB}}$, ou seja, que $\frac{\overline{AK}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{TB}}$. Mas note-se que $T\widehat{K}A = 180° - B\widehat{K}T = T\widehat{B}P$, e já vimos que $K\widehat{A}T = P\widehat{B}T$. Então $[TKA] \sim [TPB]$. Logo,

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AP}}$$

e isto, pelo que já foi visto, conclui o problema.

Os próximos problemas são de IMO e podem ser resolvidos de forma relativamente simples com Semelhanças de Triângulos.

Problema 25 (IMO 1990)**.** *As cordas $[AB]$ e $[CD]$ de uma circunferência intersectam-se no ponto E no interior da circunferência. Seja M um ponto no interior do segmento $[EB]$. A recta tangente em E à circunferência que passa por D, E e M intersecta as rectas BC e AC em F e G, respectivamente. Sabendo que*

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = t$$

determina a razão $\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}}$ em função de t.

Problema 26 (IMO 2007)**.** *No triângulo $[ABC]$, a bissectriz do ângulo $\angle BCA$ intersecta a circunferência circunscrita no ponto $R \neq C$, intersecta a mediatriz de $[BC]$ em P e intersecta a mediatriz de $[AC]$ em Q. Sejam K e L os pontos médios de $[BC]$ e $[AC]$, respectivamente. Prova que os triângulos $[RPK]$ e $[RQL]$ têm a mesma área.*

Problema 27 (IMO 2014)**.** *Os pontos P e Q encontram-se sobre o lado $[BC]$ de um triângulo acutângulo $[ABC]$ de modo que $P\widehat{A}B = B\widehat{C}A$ e $C\widehat{A}Q = A\widehat{B}C$. Os pontos M e N encontram-se sobre as rectas AP e AQ, respectivamente, de modo que P é o ponto médio de $[AM]$ e Q é o ponto médio de $[AN]$. Prova que as rectas BM e CN se intersectam sobre a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.*

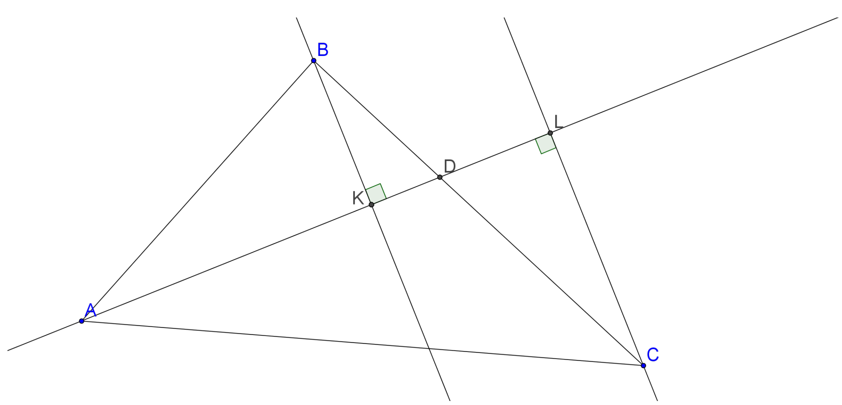
3.2 Teorema da Bissectriz

Esta secção destina-se unicamente a apresentar um resultado interessante e bastante útil acerca de bissectrizes.

Teorema 3.4 (Bissectriz)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo e seja D o ponto de intersecção da bissectriz de $\angle CAB$ com $[BC]$. Então,*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

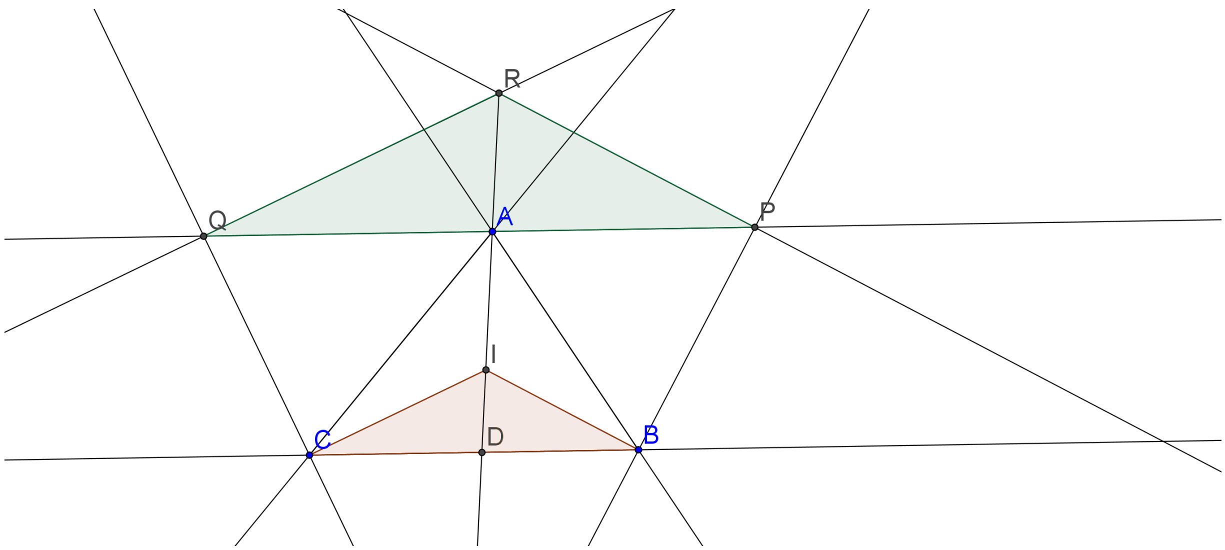
Demonstração. Sejam K e L as projecções ortogonais de B e C, respectivamente, sobre AD. Então



os triângulos $[DKB]$ e $[DLC]$ são evidentemente semelhantes, logo $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CL}}$. Por outro lado, os triângulos $[ABK]$ e $[ACL]$, são semelhantes, pois $K\widehat{A}B = L\widehat{A}C$ e $B\widehat{K}A = C\widehat{L}A = 90°$; logo, $\frac{\overline{BK}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. Assim, provámos o pretendido. □

Esta secção não ficaria completa sem um exemplo de aplicação. Assim, vamos resolver um problema das Olimpíadas Iberoamericanas.

Problema 28 (Ibero 2012)**.** *Seja $[ABC]$ um triângulo e sejam P e Q as intersecções da paralela a BC que passa por A com as bissectrizes externas dos ângulos em B e C, respectivamente. A recta perpendicular a BP por P e a recta perpendicular a CQ por Q intersectam-se em R. Seja I o incentro de $[ABC]$. Prova que $\overline{AI} = \overline{AR}$.*



Vamos começar com algumas observações simples. Temos $P\widehat{B}A = \frac{180° - A\widehat{B}C}{2}$ e $B\widehat{A}P = A\widehat{B}C$, logo $A\widehat{P}B = \frac{180° - A\widehat{B}C}{2}$. Assim, $\overline{AP} = \overline{AB}$. Analogamente, $\overline{AQ} = \overline{AC}$.

É conhecido e fácil de provar que a bissectriz externa e a bissectriz interna são perpendiculares. Assim, BI é paralela a PR. Analogamente, CI é paralela a QR. Como BC é paralela a PQ, temos que os triângulos $[CIB]$ e $[QRP]$ são semelhantes.

Seja $D = AI \cap BC$. Observe-se que, pelo Teorema da Bissectriz,

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}$$

pelo que os pontos D e A são "pontos correspondentes" nos triângulos semelhantes $[CIB]$ e $[QRP]$. Logo, $\frac{\overline{AR}}{\overline{DI}}$ é igual à razão de semelhança entre os dois triângulos, ou seja,

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP} + \overline{AQ}}{\overline{BC}} = \frac{b+c}{a}$$

Por outro lado, pelo Teorema da Bissectriz temos também $\frac{\overline{AI}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{c}{\overline{DB}}$. Agora coloca-se uma questão importante: como escrever $\overline{DB}$ em função dos comprimentos dos lados do triângulo? Esta é uma ideia importante em vários problemas.

Observe-se que, pelo Teorema da Bissectriz, $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, ou seja,

$$\frac{\overline{DB}}{a - \overline{DB}} = \frac{c}{b}$$

e temos uma equação do primeiro grau em $\overline{DB}$; resolvendo-a, obtemos

$$\overline{DB} = \frac{ac}{b + c}$$

e portanto

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{DI}} = \frac{c}{\left(\frac{ac}{b+c}\right)} = \frac{b + c}{a}$$

Assim, $\frac{\overline{AR}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{DI}}$, pelo que $\overline{AI} = \overline{AR}$.

4 Potência de Ponto

Uma das ferramentas mais poderosas em problemas olímpicos de geometria é a Potência de Ponto. Vamos conhecer esta ferramenta ao longo desta secção.

4.1 Definição e o Teorema das Cordas

Vamos começar por definir a Potência de um ponto em relação a uma circunferência.

Definição 4.1 (Potência de Ponto)**.** *Dada uma circunferência ω de centro em O e raio r, define-se a* potência do ponto X *em relação a ω como*

$$\mathrm{Pot}(X, \omega) = \overline{OP}^2 - r^2.$$

Podemos fazer imediatamente algumas observações quanto à definição. A circunferência ω é então o lugar geométrico dos pontos X tais que $\mathrm{Pot}(X, \omega) = 0$. Além disso, X está no círculo delimitado por ω se e só se $\mathrm{Pot}(X, \omega) \leq 0$. A potência de ponto depende apenas da distância do mesmo ao centro. Mais precisamente, X e Y estão à mesma distância de O se e só se as suas potências são iguais.

No entanto, por si só, a definição não tem grande interesse. Mas o mesmo não se passa com o próximo teorema.

Teorema 4.2 (Teorema das Cordas)**.** *Seja ω uma circunferência, P um ponto no plano e $A, B \in \omega$ tais que A, B e P são colineares. Então*

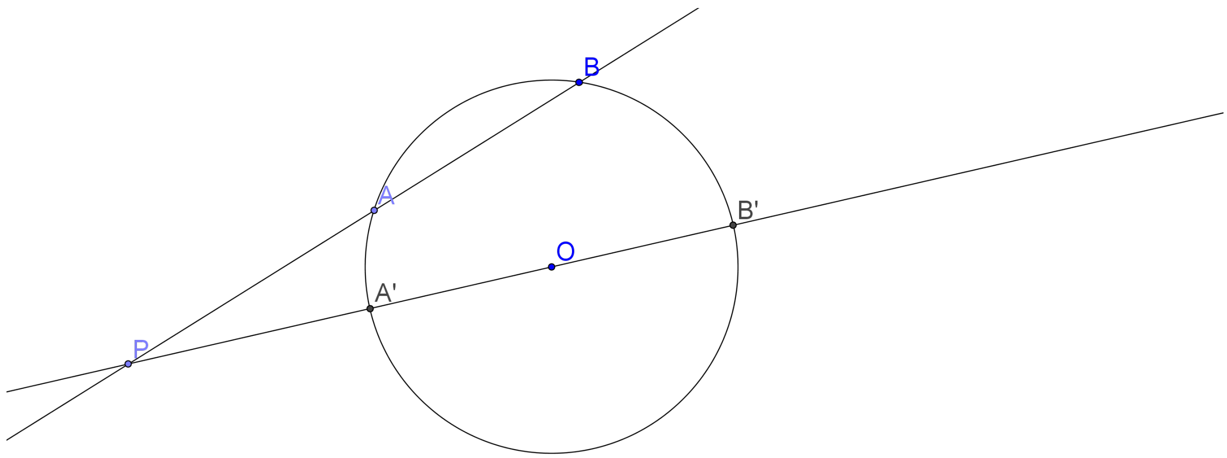
$$\mathrm{Pot}(P, \omega) = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}.$$

(*Nota:* Aqui, ententemos $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$ como segmentos orientados. Assim, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \overline{AP} \cdot \overline{BP}$ se $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$ têm o mesmo sentido, e $-\overline{AP} \cdot \overline{BP}$ caso contrário.)

Demonstração. Vamos apenas fazer a prova para o caso em que P está fora da circunferência; o caso em que está dentro é totalmente análogo. Sem perda de generaldiade, suponhamos que P está mais próximo de A do que de B. Sejam A' e B' as interseções do diâmetro de ω que passa por P com ω, estando A' mais próximo de P. Por arco-capaz, $\angle PBA' = \angle PB'A$, logo $[B'PA] \sim [BPA']$. Mas assim $\frac{\overline{B'P}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{A'P}}$. Deste modo,

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{A'P} \cdot \overline{B'P} = (\overline{OP} - r)(\overline{OP} + r) = \overline{OP}^2 - r^2 = \text{Pot}(P, \omega).$$

Tal como desejado. $\square$



Existe um caso particular deste teorema interessante. Quando $A \equiv B$, a recta A, B é entendida como a tangente a ω que passa por A; de facto, se considerarmos AB a variar, quando a recta se aproxima da tangente, A aproxima-se de B. Deste modo, se P está na tangente a ω por A, $\text{Pot}(P, \omega) = \overline{AP}^2$.

Vamos parar um pouco para tentar perceber o que nos diz o teorema. O teorema diz-nos que o produto $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ é constante ao variar A, B em ω de forma a que B, A, P sejam colineares. Desse modo, se $[ABCD]$ é um quadrilátero cíclico e $P = AB \cap CD$, então $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP}$. Por outro lado, o converso desta afirmação também é verdadeiro, isto é, se $[ABCD]$ cumpre essa igualdade, então é cíclico.

Teorema 4.3 (Converso do Teorema das Cordas)**.** *Sejam A, B, C, D quatro pontos e $P = AB \cap CD$. Então $[ABCD]$ é cíclico se e só se $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP}$.*

Demonstração. Se existe uma circunferência ω tal que $A, B, C, D \in \omega$, então $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \text{Pot}(P, \omega) = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP}$. Para provar a outra implicação, suponhamos que se tem a igualdade do enunciado e seja D' a segunda interseção da circunferência circunscrita a $[ABC]$ com CD; então $[ABCD']$ é cíclico, logo $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{D'P}$, de onde $D \equiv D'$. $\square$

Uma vez mais, o caso no caso em que D, C coincidem interpretamos a recta DC como a tangente por C. Dessa forma, obtemos o seguinte facto.

Facto 4.4. *Seja $[ABC]$ um triângulo e $P \in AB$. Então PC é tangente à circunferência circunscrita a $[ABC]$ se e só se $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.*

O Converso do Teorema das Cordas é, portanto, um critério para a ciclicidade de um quadrilátero e pode ser muito útil. Por envolver apenas uma igualdade entre comprimentos, torna possível usar contas (trigonometria, métrica, etc.) para provar uma ciclicidade. Além disso, vamos ver que, quando combinado com o eixo radical, vai ter incríveis consequências.

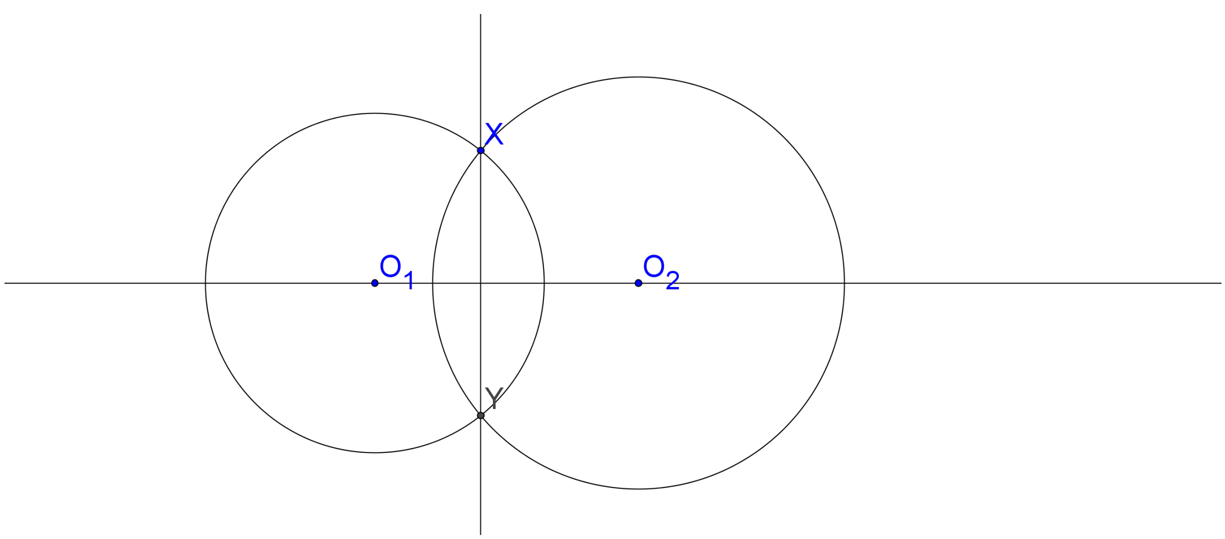
4.2 Eixo Radical

Definição 4.5. *Dadas duas circunferências ω_1, ω_2, o* eixo radical *das duas circunferências define-se como o lugar geométrico dos pontos X com igual potência de ponto em relação às duas circunferências, isto é,*

$$\text{Pot}(X, \omega_1) = \text{Pot}(X, \omega_2).$$

A próxima proposição vai caracterizar geometricamente o eixo radical, e é ela a base da sua utilidade.

Proposição 4.6 (Eixo radical)**.** *Sejam ω_1 e ω_2 duas circunferências de centros O_1 e O_2, respectivamente. Então, o eixo radical de ω_1 e ω_2 é uma recta perpendicular a O_1O_2. Se ω_1, ω_2 se intersectam em X, Y, então o eixo radical é a recta XY; caso sejam tangentes, $X \equiv Y$ e o eixo radical é a tangente comum por X.*



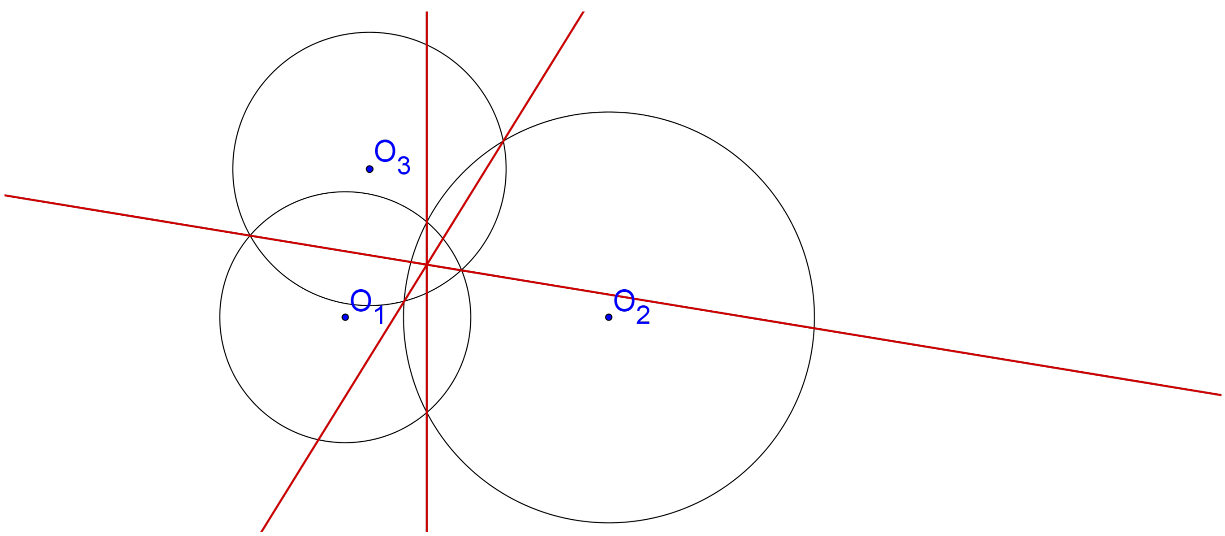
Demonstração. Começamos por provar que o eixo radical é uma recta perpendicular a O_1O_2. Considerando Z a variar na recta O_1O_2, é fácil ver que existe um único ponto Z nessa recta no eixo radical. Seja X' a projeção ortogonal de X em O_1O_2. Então, pelo Teorema de Pitágoras, $\text{Pot}(X,\omega_1) = \overline{O_1X}^2 - r_1^2 = \overline{O_1X'}^2 + \overline{XX'}^2 - r_1^2$, e uma igualdade análoga para ω_2. Assim,

$$\text{Pot}(X,\omega_1) = \text{Pot}(X,\omega_2) \Leftrightarrow \overline{O_1X'}^2 - \overline{O_2X'}^2 = r_1^2 - r_2^2 = \overline{O_1Z}^2 - \overline{O_2Z}^2 \Leftrightarrow X' \equiv Z.$$

Como tal, X está no eixo radical se e só se $XZ \perp O_1O_2$, ou seja, o eixo radical é a recta que passa por Z perpendicular a O_1O_2, como pretendido. Além disso, se X, Y são as intersecções de ω_1, ω_2, então $\text{Pot}(X,\omega_1) = \text{Pot}(X,\omega_2) = 0 = \text{Pot}(Y,\omega_1) = \text{Pot}(Y,\omega_2)$, logo X e Y estão no eixo radical e, como este é uma recta, a nossa prova termina. □

Esta proposição diz-nos que o eixo radical é uma recta, e rectas são objectos totalmente familiares. Um dos propósitos de identificar determinadas rectas como eixos radicais é que, com eixos radicais, temos uma colinearidade imediata.

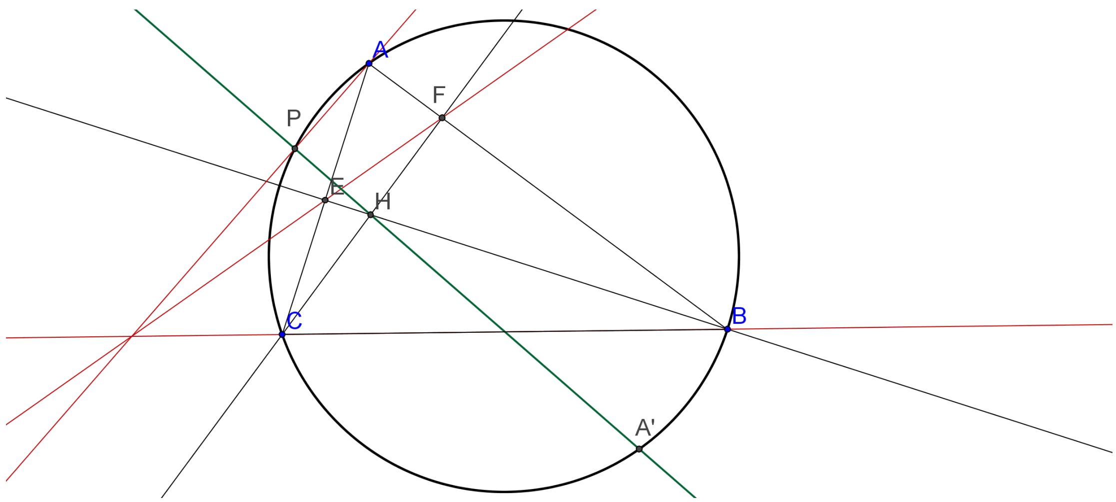
Teorema 4.7 (Centro Radical)**.** *Sejam ω_1, ω_2 e ω_3 três circunferências com centros não colineares. Então o eixo radical de ω_1, ω_2, o eixo radical de ω_2, ω_3 e o eixo radical de ω_3, ω_1 concorrem num ponto. Se os centros são colineares, os três eixos radicais são paralelos.*



Demonstração. Se os centros são colineares, então os três eixos radicais são perpendiculares à recta que une os centros, logo são paralelos entre si. Caso contrário, os eixos radicais de ω_1, ω_2 e ω_2, ω_3 não são paralelos, logo concorrem num ponto X. Mas, por definição, para este ponto X temos $\text{Pot}(X,\omega_1) = \text{Pot}(X,\omega_2) = \text{Pot}(X,\omega_3)$, logo X também pertence ao eixo radical de ω_1, ω_3, como pretendido. □

O ponto de concorrência é habitualmente chamado Centro Radical de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Vamos agora passar a um problema relativamente simples para exemplificar como podemos aplicar isto.

Problema 29. *Seja $[ABC]$ um triângulo, H o seu ortocentro, $E = BH \cap AC$, $F = CH \cap AB$ e A' o ponto diametralmente oposto a A em relação à circunferência circunscrita a $[ABC]$; por fim, seja P a outra interseção de $A'H$ com a circunferência circunscrita a $[ABC]$. Mostra que AP, EF e BC concorrem.*



Observe-se que, como A e A' são pontos diametralmente opostos, $A\widehat{P}H = 90° = A\widehat{E}H = A\widehat{F}H$, logo $[APEFH]$ é cíclico; seja ω_1 a circunferência circunscrita a esse quadrilátero. Também $[BCEF]$ e $[APCB]$ são obviamente cíclicos; sendo ω_2 e ω_3 as circunferências circunscritas a esses quadriláteros, temos agora, pela Proposição 4.6, que AF é o eixo radical de ω_1, ω_3, EF de ω_1, ω_2 e BC de ω_2, ω_3. Como tal, as três rectas intersectam-se no centro radical de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, como pretendido.

Neste problema essencialmente o que fizemos foi identificar as rectas que queremos provar que são concorrentes como eixos radicais de três circunferências, para assim poder aplicar o Centro Radical. Esta estratégia é comum a vários outros problemas.

O Centro Radical dá-nos uma concorrência a partir de uma ciclicidade. No entanto, graças ao converso do teorema das cordas, também podemos obter uma ciclicidade a partir de uma concorrência.

Teorema 4.8. *Sejam ω_1, ω_2 duas circunferências e $A, B \in \omega_1$, $C, D \in \omega_2$. Então, $[ABCD]$ é cíclico se e só se AB e CD concorrem no eixo radical de ω_1, ω_2.*

Demonstração. Se $[ABCD]$ é cíclico, a concorrência vem do Teorema do Centro Radical. Suponhamos agora que $P = AB \cap CD$ está no eixo radical. Então, por definição do mesmo,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \text{Pot}(P, \omega_1) = \text{Pot}(P, \omega_2) = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP}.$$

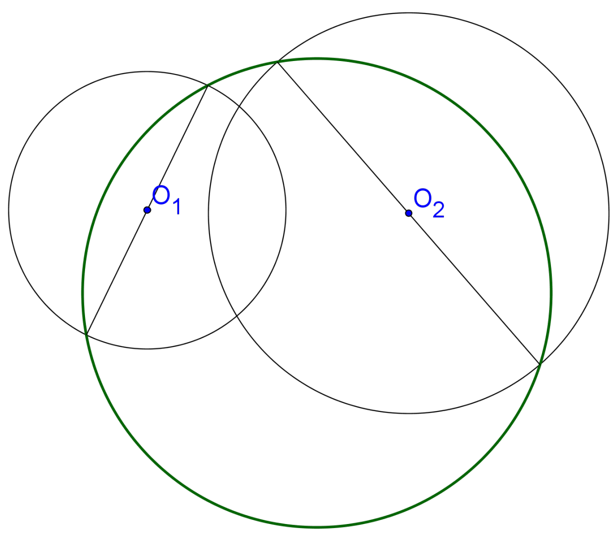
E pelo converso do Teorema das Cordas temos o pretendido. □

Daremos mais uma aplicação destas ideias. O problema seguinte é das Olimpíadas Iberoamericanas de 1999; com o material deste artigo, o problema deve ser absolutamente directo, mas sem termos a Potência de Ponto à nossa disposição torna-se bastante complicado.

Problema 30 (Ibero 1999)**.** *Dadas duas circunferências $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ dizemos que $\mathcal{M}$ bissecta $\mathcal{N}$ se a corda comum às duas circunferências é um diâmetro de $\mathcal{N}$.*

1. *Mostra que, dadas circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, existem infinitas circunferências $\mathcal{M}$ que bissectam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.*

2. *Qual é o lugar geométrico do centro das circunferências $\mathcal{M}$ da alínea anterior?*



Aqui resolvemos apenas a primeira alínea. Seja $[AB]$ um diâmetro de $\mathcal{C}_1$ e $[CD]$ um diâmetro de $\mathcal{C}_2$. Então, queremos que $[ABCD]$ seja cíclico. Mas para o fazer, pelo teorema 4.8, basta que $AB \cap CD$ esteja no eixo radical das circunferências! Assim, a construção é fácil; consideramos um ponto P no eixo radical de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e definimos A, B como as interseções de PO_1 com $\mathcal{C}_1$ (onde O_1 é o centro de $\mathcal{C}_1$), e analogamente C, D. Pelo Teorema 4.8, $[ABCD]$ é cíclico, e é evidente que a circunferência circunscrita a esse quadrilátero bissecta $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

Por fim, alguns problemas (e é de notar, na lista abaixo, que são vários os problemas das IMO que se resolvem de maneira elegante com Potência de Ponto):

Problema 31. *Seja* $[ABCD]$ *um quadrilátero convexo. Sejam* E *e* F *as projecções ortogonais de* A *sobre* BC *e* DC*, respectivamente. Mostra que o quadrilátero* $[EFDB]$ *é cíclico se e só se* AC *é perpendicular a* BD*.*

Problema 32 (IMO 1995)**.** *Sejam* A, B, C, D *quatro pontos numa recta, por esta ordem. As circunferências de diâmetros* $[AC]$ *e* $[BD]$ *intersectam-se nos pontos* X *e* Y*. A recta* XY *intersecta a recta* BC *em* Z*. Seja* P *um ponto na recta* $[XY]$*, diferente de* Z*. A recta* CP *intersecta a circunferência de diâmetro* $[AC]$ *em* C *e* M*, e a recta* BP *intersecta a circunferência de diâmetro* $[BD]$ *em* B *e* N*. Mostra que as rectas* AM*,* DN *e* XY *são concorrentes.*

Problema 33 (IMO 2008)**.** *Seja* H *o ortocentro do triângulo acutângulo* $[ABC]$*. A circunferência* Γ_A *tem centro no ponto médio de* $[BC]$ *e passa por* H*, e intersecta* $[BC]$ *em* A_1 *e* A_2*. Os pontos* B_1, B_2, C_1, C_2 *definem-se de forma semelhante para os lados* $[AC]$ *e* $[BC]$*. Mostra que os seis pontos* $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ *estão sobre uma circunferência.*

Problema 34 (IMO 2013)**.** *Seja* $[ABC]$ *um triângulo acutângulo com com ortocentro* H*, e seja* W *um ponto no segmento* $[BC]$*. Os pontos* M *e* N *são os pés das alturas de* B *e* C*, respectivamente. Seja* ω_1 *a circunferência circunscrita a* BWN*, e* X *o ponto em* ω_1 *tal que* $[WX]$ *é um diâmetro de* ω_1*. Analogamente, seja* ω_2 *a circunferência circunscrita a* $[CWM]$ *e* Y *o ponto tal que* $[WY]$ *é um diâmetro de* ω_2*. Mostra que* X, Y *e* H *são colineares.*

Problema 35 (USAMO 2009)**.** *Dadas duas circunferências* ω_1 *e* ω_2 *que se intersectam em* X *e* Y*, seja* ℓ_1 *uma recta pelo centro de* ω_1 *que intersecta* ω_2 *em* P *e* Q *e seja* ℓ_2 *uma recta que passa pelo centro de* ω_2 *e que intersecta* ω_1 *em* R *e* S*. Mostra que se* $[PQRS]$ *é cíclico, então o centro da sua circunferência circunscrita está em* XY*.*

Problema 36 (IMO 2009)**.** *Seja* $[ABC]$ *um triângulo com circuncentro* O*. Os pontos* P *e* Q *estão no interior dos lados* $[CA]$ *e* $[AB]$*, respectivamente. Sejam* K*,* L *e* M *os pontos médios dos segmentos* $[BP]$*,* $[CQ]$ *e* $[PQ]$*, respectivamente, e seja* Γ *a circunferência que passa por* K*,* L *e* M*. Supondo que* Γ *é tangente a* PQ*, mostra que* $\overline{OP} = \overline{OQ}$*.*