

高中里的数学研究: PRIMES 的经验

Pavel Etingof Slava Gerovitch Tanya Khovanova

在三维空间内考虑一个有限的线集合. 这些线中的 3 条线 (不在同一平面内) 相交于同一点, 该点称为连接点. 如果这里有 L 条线, 那么最多可能有多少个连接点? 好吧, 让我们试试我们的运气, 随机选择 K 个平面. 任意两个平面构成一条交线, 并且任意 3 个平面构成一个连接点. 因此, 它们产生了 $L := k(k-1)/2$ 条线和 $J := k(k-1)(k-2)/6$ 个连接点. 如果 k 很大, 那么 J 就大约等于 $\frac{\sqrt{2}}{3}L^{3/2}$. 多年以来, 人们认为该猜

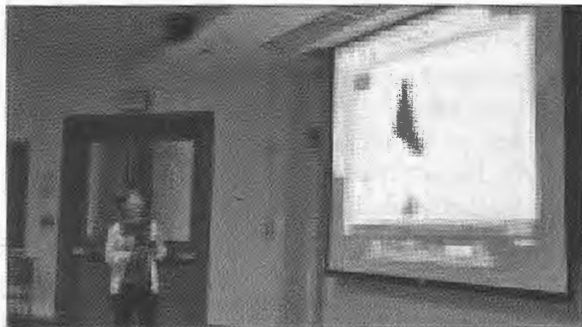


图 1 PRIMES 学生 Christina Chen 正在展示一个凸体可以隐藏在体积更小的四面体后面的照片 (PRIMES 会议, 2011)

想在下面的意义上没有人可以做得更好: 如果 L 很大, 那么 $J \leq CL^{3/2}$, 其中 C 是一个常数 (显然 $C \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$). 该猜想被 Larry Guth 和 Nets Katz 在 2007 年证明, 是关联几何学上的一个突破. Guth 还证明了可以取 $C = 10$. 你可以做得更好吗? 当然! 目前最好的结果是任意 $C > 4/3$ 结论都对. 这是由来自罗德岛的十一年级学生 Joseph Zurier 在 2014 年证明的 [Z].

这里有另一个问题. 令 K 和 L 是空间中的凸体, 并且假设无论从哪个角度, 我们都可以把 K 藏在 L 的后面 (我们可以允许平移凸体但是不能旋转它们). K 的体积至多是 L 的体积是正确的吗? 奇怪的是, 不是! Christina Chen, 一个马塞诸塞州的十年级学生, 在 2011 年证明了体积比大约为 1.16, 这是目前已知的最好值 ([CH], 见图 1). 同样, 它可以任意大吗? 不! Christina, Tanya Khovanova, 和 Dan Klain 证明了在任意维度下它的体积比都要小于 3 [CKK].

“这是真的吗? 十年级和十一年级的学生可以进行原创数学研究, 这真的可能吗?”

是的! Christina 和 Joseph, 还有其他上百名学生, 在 PRIMES (Program for Research In Mathematics, Engineering, and Science (数学, 工程和科学中的研究项目; web.mit.edu/primes) 做着他们的研究. 从 2011 年 1 月以来, PRIMES 一直由麻省理工学院数学系运作. 每年我们都会从准备申请的学生, 他们的家长和想组织相似项目的学者那里收到无

译自: Notices of the AMS, Vol. 62 (2015), No. 8, p. 910–918, Mathematical Research in High School: The PRIMES Experience, Pavel Etingof, Slava Gerovitch, and Tanya Khovanova, figure number 6. Copyright ©2015 the American Mathematical Society. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学会与作者授予译文出版许可.

Pavel Etingof 是麻省理工学院的数学教授和 PRIMES 首席研究顾问. 他的邮箱地址是 etingof@math.mit.edu.

Slava Gerovitch 是麻省理工学院的数学史讲师和 PRIMES 项目主任, 文章中所有照片由他提供. 他的邮箱地址是 slava@math.mit.edu.

Tanya Khovanova 麻省理工学院数学讲师和 PRIMES 总导师. 她的邮箱地址是 tanya@math.mit.edu.

数关于我们项目的问题。在这里，我们很高兴回答其中一些问题，分享我们的经验，并告诉更多数学界的人，在高中进行数学研究，这样一个看似不可能的事情是如何完成的。

“你们在寻找什么类型的学生？我的儿子想知道，如果他在国际数学奥林匹克竞赛没有一个完美分数，并且尚未精通 Fermat (费马) 大定理的 Wilcs (怀尔斯) 证明，他也可以申请吗？”

Pavel Etingof (以下简称为 **P. E.**): 是的，如果他热爱数学，必须的！一些背景知识 (如微积分) 是需要的，但是通常他会在导师的指导下学习。此外，很多有天赋的高中生在数学竞赛中做得很好，但好的研究人员并不总是快速的解决问题者。这需要时间，努力和毅力去学习不同的背景和尝试不同的方法，其中许多人注定是失败的。我们寻找有天赋的学生去进行数学研究，他们要有坚持不懈的毅力，喜欢学习，努力工作，富有想象力。并且最重要的是，他们为数学感到疯狂！

“你们如何挑选学生？我的女儿问，为了被接收，难道她需要是一个把咖啡变成定理的机器？”

P. E.: 数学家只不过是用了 10% 的时间把咖啡变成定理，然后在余生用各种不成功的方法去证明定理的人而已——并且我们欢迎你的女儿加入项目！

Slava Gerovitch (以下简称为 **S. G.**): 我们仔细考虑奥赛成绩，目的陈述，建议，和年级，但申请的关键部分是入学问题集。我们在 9 月中旬发布，两个月期限。

Tanya Khovanova (以下简称为 **T.K.**): 这些并不是可以快速解决的问题，乍一看，他们中的一些甚至可以难倒数学教授。学生需要思考一个问题，查阅书籍和在线资源，第 2 天再想一想，然后一遍又一遍，直到有一天他们终于得到答案，然后写一个有详细证明的完整答案。这种长期参与数学问题的过程类似于数学研究过程。

P. E.: 事实上，这类似于我喜欢的业余爱好——采摘蘑菇。你可能在树林里转几个小时什么都看不到，然后突然间你会发现一个真正的宝藏。你需要耐心和能力去享受这个过程，忘记其它事情。一个好的采蘑菇的人和一个好的数学家有很多共同之处。

“PRIMES 的学生是单独工作还是群体工作？”

S. G.: 大多数课题是个体和有一对一的指导。一、二年级的学生，通常在合作课题中工作。小组讨论使研究更令人兴奋并且激发年轻学生，使他们更顺畅地进入数学的世界。即使在单人课题的学生也并不孤单，他们与他们的导师和建议课题的教师合作。他们组成一个团队，这里不同水平经验和资历的数学家成为平等的合作者。这种方式使得 PRIMES 学生学到协作和团队精神的能力。

P. E.: 简而言之，我们都有两个选择，内向型的数学家 (做研究时他喜欢看自己的鞋子) 和外向型的数学家 (他更喜欢看合作者的鞋子)。当然，所有的中学生都被鼓励经常看他们喜欢的导师的鞋子。

“你们如何选择课题？在 PRIMES 我的学生会被要求证明孪生素数猜想吗？”

P. E.: 著名的未解决问题通常不会成为好的课题，但我们也不会指定已经知道结果的“玩具课题”。学生们深入到真正的研究，包含所有的不确定性，失望和惊喜。找到需要最少背景的前沿课题是运行 PRIMES 课题最棘手的问题。下面是我们希望在 PRIMES 课题

中看到的一些特征:

1. 容易的开始. 有简单的课题初始阶段.
2. 灵活性. 可以考虑几个相关问题, 如何被问题卡住了, 可以从一个问题切换到另一个. 如果问题太难或不够有趣, 可以调整问题.
3. 计算机(实验)部分. 计算机辅助研究来寻找模式和做出猜想是可能的. 这样的学生, 他们往往有很强的编程能力, 当他们还没有理论工具知识的情况下, 在早期有助于课题的研究. 他们也更容易通过使用计算机代数系统的实际经验来学习新的数学概念, 例如, 代数和表示理论里的数学概念.
4. 顾问参与. 可以接触到除导师以外的数学家(通常是建议该课题的教授或研究员), 通过电子邮件和偶尔的会议讨论指导课题. 这样会产生很大的影响.
5. 大局观/动机. 至少在思想的层面, 与更广阔的领域和别人的工作产生联系.
6. 学习部分. 这个课题应该鼓励学生定期学习高等数学.
7. 可行性. 一个合理的期望是, 一个好学生可以在几个月中取得一些新的结果, 以便呈现在5月中旬的 PRIMES 年会上, 并在一年之内做出可发表的成果.
8. 与导师的研究课题或研究领域相关.

T. K.: 研究的一个关键部分是向自己提问的能力, 而不是仅仅解决别人的问题. 当学生意识到, 他们自己的力量能推动课题向一个新的方向发展, 他们将非常兴奋, 开始感觉自己对该课题的拥有感. 在他们的未来生活中, 相信自己的能力和自我提问的能力是非常重要的, 与他们的职业选择无关. 这就是为什么我们尽量选择能培养这种能力课题的原因.

P. E.: 听起来容易? 好吧, 如果你有一些空闲时间或者没有更好的事情可做(例如, 你在一个不能逃避的极其无聊的数学讲座期间), 尝试想出一个满足大多数条件的课题. 当你想出来的时候, 请邮寄给我们!

“在 PRIMES 数学等同于初等组合学, 这是真的吗? 是不是 PRIMES 学生研究复杂的竞赛问题来代替学习代数、拓扑、几何、分析、数论?”

P. E.: 不是真实情况. 我们在这些领域有很多课题, 特别是非交换代数和表示论. 在 PRIMES 阅读小组, PRIMES 学生也能接触到这些领域.

许多 PRIMES 的课题是关于离散数学的, 这是正确的. 这是因为在这个领域里, 更容易找到有趣且需要相对较少背景知识的课题. 但是它们不仅仅是复杂的竞赛问题. 许多被设计的课题涉及到基本问题, 并鼓励学习与离散数学有许多深刻联系的其它领域. 简而言之, 我们尝试展示给学生数学的广度和统一性.

“在高中研究非交换代数和表示论? 触及基本问题? 没有开玩笑吧? 你们能给我举些例子吗?”

P. E.: 你想我给些技术性的东西? 没问题, 展示给你.

一个课题组关心的是关于有理 Cherednik 代数的表示. 设 G 是一个有限群和 V 是域 k 上的一个有限维表示, 则可以定义有理 Cherednik 代数 $H(G, V)$. 这是 $kG \rtimes D(V)$ 代数的一个特定显著变形, $kG \rtimes D(V)$ 是 G 的群代数与 V 上的微分算子代数的半直积. 举个例

子, 如果 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V = k$, 并且生成元 $s \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用在 V 中的坐标 x 满足 $s(x) = -x$, 那么 $H(G, V)$ 由 s, x 和 Dunkl 算子 $\partial_x - \frac{k}{x}s$ 生成. $H(G, V)$ 的表示是目前一个活跃的研究课题.

在 [DS] 里, Sheela Devadas 和她的导师 Steven Sam, 使用交换代数方法研究 $H(G, V)$ 的最低权重不可约表示, 这里 G 是复镜射群 $G(m, r, n)$ 和 $V = k^n$ (其中 k 的特征为 p). 他们给出了一些猜想的特征公式并在许多情形证明了这些公式. 一般来说, 这是一个未解难题. 即使在 $n = 2$ 且 $m = r$ (正多边形的对称群) 时, 它也并不容易; 在这种情况下, 更明确的结果是 PRIMES 学生 Carl Lian [Li] 证明的.

在 [DT] 里, Fengning Ding 和他的导师 Sasha Tsymbaliuk, 考虑连续 Cherednik 代数的表示, 它是 $H(G, V)$ 在 G 是一个可约代数群 (而不是一个有限群) 情况下的一般化. 也就是说, 他们考虑当 $G = GL(n, \mathbb{C})$ 且 $V = \mathbb{C}^n$ 时的情形. 他们计算 $H(G, V)$ 的中心, 分类有限维不可约表示, 并计算他们的特征.

在 [KL] 里, Shashwat Kishore 和他的导师 Gus Lonergan, 研究空间 $\text{Hom}(M_\lambda, M_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes M_{\lambda_n})$ 上典范 Hermite (埃尔米特) 形式的符号差, 其中 $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, 且 M_λ 是 Lie (李) 代数 \mathfrak{sl}_2 的 Verma 模, 当形式是正定时, 他们进行分类, 并应用符号差公式解决了一个拓扑问题: 给出 Gaudin 模型主函数 (master function)

$$F(t_1, \dots, t_m, z_1, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)^2 \prod_{i=1}^m \prod_{k=1}^n (t_i - z_k)^{-\lambda_k}$$

实临界点的下界, 其中 $m = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n - \lambda)$. 他们推广结果到量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (这里 $|q| = 1$).

还有另一些代数课题. 与 Yongyi Chen, Michael Zhang 和他们的导师 David Jordan 一起, 我们研究代数 $A_P := k[x, y, z]/(P)$ 上的迹函数, 其中 P 是一个一般的 d 次齐次多项式, k 是特征为 p 的域 [CEJZ]. 由定义, 迹函数是 A_P 上的一个线性函数, 在 Poisson (泊松) 括号

$$\{f, g\} := \frac{\partial(P, f, g)}{\partial(x, y, z)}$$

上为零. 问题是要计算迹函数空间的 Hilbert (希尔伯特) 级数 $h(z) := \sum_{n \geq 0} h_n z^n$, 其中 h_n 是次数为 n 的迹函数空间的维数. 这说明对于足够大的特征 p , 函数 $h(z)$ 是可以由下面奇怪的公式表示出来的:

$$h(z) = \frac{(1 - z^{d-1})^3}{(1 - z)^3} + z^{d-3} \left(\frac{1 - z^{pd}}{(1 - z^p)^3} + \frac{d(d-3)z^p}{1 - z^p} - 1 \right).$$

我们在计算机上通过实践发现这个公式, 并通过使用一些代数几何和 D 模理论证明了它 (并推广到拟齐次的情形).

另一个代数课题是关于结合代数 A 的下中心列: $L_1 = A, L_2 = [A, L_1], L_3 = [A, L_2]$, 依此类推. Feigin 和 Shoikhet 在 2006 年证明了, 如果 A 是 \mathbb{Q} 上有 n 个生成元的自由代数, 那么 $B_2 = L_2/L_3$ 是有 n 个变量的正偶次闭微分形式空间. 与 Surya Bhupatiraju, Bill Kuszmaul, Jason Li 和他们的导师 David Jordan 一起, 我们在整系数的情形下推广了这个结果, 将 B_2 表示为整数上的 de Rham (德拉姆) 上同调 [BEJKL]. 在另一个课题中, Isaac Xia 和他的导师 Yael Fregier, 研究商 $N_i := AL_i/AL_{i+1}$, 并且证明了, 如果 A 是在特征为 p 的域上 x_1, \dots, x_n 的一个自由代数模去表示为 $x_1^{p^{m_1}}, \dots, x_n^{p^{m_n}}$ 的关系, 并且如果 A 的 Abel (阿贝尔) 化是有限维

的, 那么 N_i 的维数被 $p^{\sum m_i}$ 整除 [FX]. 其证明基于有均幂 (divided powers) 的微分算子代数表示理论.

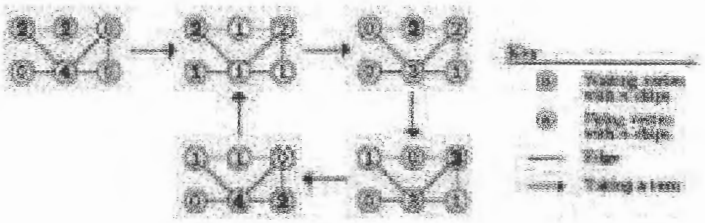


图 2 PRIMES 课题 (2011)

厌倦了代数? 下面是一个关于组合学的课题. 一个线性方程是 r 正则的, 如果对于正整数集的每个 r 着色, 都存在相同颜色的正整数满足该方程. 在 2005 年 Fox 和 Radoicic 猜想, 对于任意 $n \geq 1$, 方程

$$x_0 + 2x_1 + \dots + 2^{n-1}x_{n-1} - 2^n x_n = 0$$

有 n 正则次数. 这将证明 1933 年 Rado 提出的一个猜想. 虽然后来 Rado 猜想可以用不同的方程簇证明, 但 Fox-Radoicic 猜想仍然未解决. 在 László Lovász 的指导下, 这个猜想 (广义形式) 被 Noah Golowich [Go] 证明.

S. G.: 这是漂亮的数学, 但听起来像是我们授予课题的“事先结果”部分, 你要复制粘贴在这里吗? 这将使读者入睡! 用一个兴奋的游戏或迷人的故事的方式告诉他们, 我们学生所做的事情.

P. E.: 好吧, 让我尽我最大的能力. 如果足够富有, 他每天给每个火星朋友一个火星比索. 这会发生什么呢? 这个过程称为“平行芯片烧制游戏 (parallel chip-firing game)” (图 2), 它是图论里一个重要的动力学模型. 显然, 它最终是周期性的, 但因为它是非线性的, 人们能先验预期复杂的行为. 但 Ziv Scully 和他的导师 Damien Jiang, Yan Zhang, 能够完全描述可能的周期模式 [JSZ]. 这是一个真正美丽的结果!

S. G.: 也许这是资助 PRIMES 的一个好模式? 我想这个模式不仅适用于火星比索, 也适用于百元大钞? 我们仅需要保证 PRIMES 有足够富有的朋友...

P. E.: 好了, 这里有一个小陷阱: 根据这个模型, PRIMES 也不得不放弃了百元大钞. 系统中的资金总额将被保留, 所以项目主任的年薪将不幸为零!

“但肯定不是所有课题都有这么高的水平. 我看到其中一个是关于“dessins d'enfants”的. 除非我忘记我的法语, 它的意思是“儿童画”. 这可能会涉及严肃的数学吗?”

P. E.: 事实上, 这是我们的一个更高等的课题! 这里的儿童是 Alexandre Grothendieck (格罗滕迪克, 1928—2014), 他是 20 世纪最伟大的数学家之一. 1984 年在他的名作“一个计划的纲要 (Esquisse d'un Programme)”里, 提出通过其作用在复平面上分支为 $0, 1, \infty$ 的有限覆盖来研究 Galois (伽罗瓦) 群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. 这样的平面图形覆盖, 他称之为“儿童画 (dessins d'enfants)”. 一个重要的问题是找到覆盖的不变量 (或等价于 Grothendieck 图), 它可以验证在 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 作用下两个给定覆盖是不等价的. Ravi Jagadeesan (由 Akhil Mathew 指导) 发现了一个新的比之前更强大的不变量, 并用它证明了特定类型 Galois 轨道的一个新的下界 [Ja], 虽然它的作者是一个十一年级学生, 但是这个结果是真正成熟的数学家感兴趣的!

“你们如何把学生与课题匹配起来? 这里有相关的匹配原则吗?”

P. E.: 是的. 我们总是能找到一个好的匹配, 多亏了这个违反直觉的数学事实存在, 好的匹配存在且容易找到: 在 Gale-Shapley (盖尔-沙普利) 稳定婚姻定理中, 它说在理想世界中所有的婚姻都是稳定的. 事实上, 现实世界缺乏理想的唯一原因是人们不知道足够的数学!

T. K.: 然而聪明的 PRIMES 学生很少知道什么样的课题适合自己. 例如, 许多申请者希望他们可以做 Riemann (黎曼) 假设方面的工作. 大多数申请者把数论作为他们的首要兴趣, 这可能是由于 PROMYS, 加拿大-美国数学夏令营, Ross¹⁾ 和另一些项目教学生更高深数论影响的结果. 然而最前沿的数论课题对于高中生来说通常过于高深. 由于这些原因, 符合申请人喜好的课题并不总是好的.

但是我们尽力从申请书中收集真实的喜好和个人能力, 并从中发现尽可能适合学生的课题.

此外, 平均来说一个 PRIMES 学生比麻省理工学院的一个数学教授有更出色的编程能力. 我们的许多课题中都有计算机部分. 因此我们在匹配人员与课题的时候, 也会考虑到除了数学以外的编程背景.

S. G.: 大多数学生研究的领域是他们之前没有接触过的, 因为好的课题都在那里. 在项目进行过程中, 我们会根据学生的能力, 准备工作和工作进度来调整每个课题的难度. 让每个学生发现证明新定理的乐趣.

“你如何为导师寻找适合他们的课题和学生? 是否 PRIMES 学生的研究会干扰导师的研究并毁掉他们的职业生涯?”

S. G.: PRIMES 学生的导师通常都是数学研究生, 有时是博士后或者那些想与高中生一起工作的教员. 我们寻找拥有出色的教学技能和完美人格的导师, 他们可以成为出色的榜样. 我们也尝试根据老师的研究风格——解决问题的类型和方向来匹配学生和课题.

最后, 为了确保 PRIMES 学生不影响导师的职业生涯和研究, 我们鼓励导师指导与自己工作相关的课题. 这不仅提高了指导的质量, 而且把指导与研究相结合, 常常出现与学生合作的论文. 因此导师不仅额外增加他们的津贴和宝贵的指导经验, 还可以与学生联合发表论文增加出版数量, 增强他们在就业市场中的竞争力.

T. K.: 有些导师说, 在指导高中生如何做研究之后, 他们终于看清了自己.

“你们接收其他州的学生吗? 其它国家? 其它的行星, 行星系统, 星系?”

S. G.: 前两年, PRIMES 项目人员来自于当地学生. 在 2013 年, 我们决定做一个实验. 我们从全国挑选 5 名学生, 通过在网络上使用软件与硬件工具在线协作的方式来指导他们的研究课题. 实验结果是成功的, 并且在接下来的一年里, 我们把 PRIME 美国部分人数扩大到 13 人, 包括两名来自位于 Urbana-Champaign 的伊利诺伊大学的指导教师. 今年的州外学生人数升至 15 人, 为了满足需求, 我们与几所大学的教师合作, 包括纽约市立大学和石溪纽约州立大学.

1) PROMYS, Program in Mathematics for Young Scientists (青年科学家数学项目) 的简称; 它与 Ross 数学营 (ROSS) 以及斯坦福大学数学夏令营 (SUMaC) 并称为美国三大顶尖数学训练营.——编注

PRIMES 美国部分不仅向全国有数学天赋的学生提供研究机会,而且也作为测试远距离研究指导新方法的一个实验室,并且把 PRIMES 的做法传播到美国其他大学. PRIMES 欧洲分部目前正在筹备中.

P. E.: 是的,而且 PRIME 外星人项目目前正在建设中. 最初我们脚踏实地的项目主任并不愿意,但我已经提前说服了他. 然而,外星人高中生可能比麻省理工学院的数学教授知道的更多. 所以我想在来自银河系遥远尽头的高中导师指导下证明 Riemann 假设...

“让一个学数学的学生这么早就开始研究好吗? 花更多的时间在阅读和学习新数学上这样不是更好吗?”

P. E.: 很多情况下,这么做是更好的. 对于每一个数学家的职业生涯,阅读数学文献和学习都是至关重要的部分. 它们在所有年龄段都是至关重要的. 事实上, I. M. Gelfand (盖尔范德), 20 世纪最伟大的数学家之一,在他的 90 岁生日庆典时说:“我是一个数学的学生”.

学习对于学生尤为重要,这是一个真理. 对于许多学生而言,在(导师)指导下阅读比立刻投入研究更有智力挑战和学习效果. 我们仔细评估 PRIMES 课题的申请人并且只为那些已经准备好的人提供研究指导. 对于大多数年轻学生,我们设立 2—3 个学生的读书组,在导师的指导下学习一本高等的数学书籍. 把 PRIMES 的第一年用在指导阅读,将帮助学生在接下来的几年里建立一个能动手处理研究问题的基础.

PRIMES 的研究课题也需要学习新的数学知识. 在课题开始之前,学生花一个月的时间阅读背景知识,并且伴随着研究过程继续阅读. 研究问题对学习数学的新领域提供了良好的动机和环境.

S. G.: 对于进入大学之前只进行半年 PRIMES 学习的高年级学生,我们也推荐他们加入阅读小组. 在低年级做一个研究课题后,PRIMES 的学生通常仍在阅读小组去扩展他们的数学知识. 我们鼓励他们开拓研究课题之外的领域,今年 PRIMES 40% 的当地数学学生加入阅读小组,60% 工作在研究课题.

“你们的项目时间表是什么? 整整一年是不是太长了? PRIMES 学生有自己生活吗?”

P. E.: 一年太短了! 我们都知道要花几个月甚至几年来证明一个好定理和写一篇好论文. 你生活中的所有时间都用来做数学. 一个著名的数学家说,为了想出一个好定理,你必须成为一个梦游者至少几个星期. 这就是我一直在尽力给我的妻子解释的,诚然没有太多成功.

S. G.: PRIMES 一年循环日程如下. 1 月是阅读时期,导师通过电子邮件或 Skype 给学生一些需要阅读和练习的背景材料. 在 2 月初我们邀请所有本地学生和他们的父母到学校进行专门会议,让学生与他们的导师见面,并与其他同学交流. 在这次会议上, Pavel 分享他做数学研究的经验,也可从 PRIMES 的网站观看.

P. E.: 这是一个非常激动人心的演讲,特别是对连续做课题的学生(提供的建议不会年复一年地改变,它们拥有永恒的价值).

S. G.: 春季学期是活跃的研究时期. 在每周的会议上学生和导师讨论进展情况,并为下周设定目标. 会议名义上持续一个半小时,但通常时间会更长,因为学生和导师对于

新思想感到兴奋. 鼓励学生与他们的导师在周中或任何时间他们有疑问或遇到问题时通过电子邮件随时联系.

T. K.: 在此期间, 我定期检查每个课题, 如果有必要给出调整建议.

S. G.: 活跃的研究在每年的 PRIMES 年度会议上达到高潮, 年会在每年 5 月阵亡将士纪念日之前的最后一个周末的麻省理工学院举行 (图 1, 图 3). 在会议之前, 学生准备一份包括预备知识, 以前的结果, 问题陈述和新结果的研究报告. 由于会议在每年的中

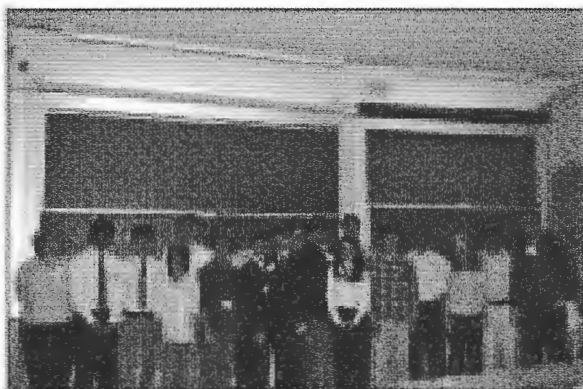


图 3 Pavel Etingof 和 Tanya Khovanova 与其他参加 2013 PRIMES 会议人员

期进行, 学生们呈现他们的工作进展. 他们把在会议上收集到的反馈意见纳入到未来的工作中. 持续两天的会议, 与研究生, 博士后, 教师等活跃的听众讨论数学、计算机科学、计算生物学. PRIMES 的学生家长很多都是学者或行业研究员, 他们也被邀请而且经常提出有趣的问题, 总是给大家留下深刻的印象.

暑假是自主学习的时期. 学生和导师协调他们的日程安排, 在城里时安排见面, 当外出时通过电子邮件交流, 或者当天气好时来个海滩相遇. 我们也鼓励 PRIMES 学生充分利用其它机会, 如参加暑期数学夏令营, 这样可以扩大他们的眼界并获得休息, 使他们回来之时更具活力.

秋天是写作时期. 学生可以根据需要与导师见面, 完成他们的课题, 并且总结他们的结果, 写一份期末报告. 这是我们教学生写数学论文的时候, 是 PRIMES 重要目标之一. 许多 PRIMES 的论文被提交到国家科学竞赛和在 1 月举行的 MAA-AMS 本科学生联合会议的会议海报展示上展出.

T. K.: 有时在课题的最后学生和他的导师会发现一个美丽的大猜想来推广他们的结果. 这个猜想在他们前面像闪烁的星星. PRIMES 学习期结束后, 他们不会停下来并且继续工作直到他们证明自己的猜想.

“学生可以再学一年吗?”

S. G.: 是的, 每年都有一些学生再干一年. 这让年轻的学生和研究人员一样成熟. 举个例子: Bill Kuszmaul 在 PRIMES 里 4 年. 在九年级时加入 PRIMES, 在第 1 年和第 2 年参加合作课题, 第 3 年进行独立课题, 第 4 年参加阅读小组. Bill 在 arXiv.org 发布了 4 篇文章 (其中 2 篇发表在《代数杂志 (Journal of Algebra)》和《组合学电子杂志 (the Electronic Journal of Combinatorics)》), 在 2011 年和 2012 年入选西门子最终奖名单, 2013 年入选 Davidson 青年奖, 并且 2014 年在 Inter STS 获得三等奖. 现在他是斯坦福大学的一名大二学生.

P. E.: 事实上, 除了证明许多很酷的定理, Bill 引入了一个新的英文单词. 在他的感谢信中, 他写道: “在文章完成前的最后几天它给我一种难以置信的感觉, 我很珍惜把生活中的一切放到其他一边, 并且 ‘primesing’ 一天其余的时间”.

“除 PRIMES 之外，还有其它高中数学研究项目吗？”

P. E.: 当然，一种选择是让学生独立工作，由活跃的研究导师参与指导，而且夏天还提供了这样的机会：RSI (对于个人课题)，PROMYS, 加拿大 - 美国数学夏令营，和其它项目 (对于课题小组)。

“听起来你们好像有对手，你们的目标是把他们淘汰吗？”

P. E.: 事实上，我们的目标是把他们中尽可能多的人加入进来，这就是为什么我们在这里回答这些问题，每年我们不得不拒绝了越来越多强有力的申请者，这是一个遗憾，我们希望不久就会有更多像 PRIMES 的机会，这些学生应该有机会实现他们的梦想！

“你们的项目与 RSI, PROMYS, 加拿大 - 美国数学夏令营、Ross 和其它夏季项目有什么不同？我的孩子应该选择哪一个？”

S. G.: 主要的区别在于夏季的项目被压缩为短短几周，而 PRIMES 要持续一整年，研究可以按正常的速度进行，有足够的时间尝试和犯错，获得额外的背景知识并且可以写出符合职业标准的详细文本。

T. K.: 仅仅几周是不够的，我最棒的主意，来自我洗澡的时候，我在一个夏季项目中不能完成研究，因为我没有足够多的淋浴！

P. E.: 完全如此，因为锅炉里没有足够的热水，我的妻子抱怨我把热水用完了，这样做是昂贵的且对环境不友好，或许我们应该想出一个办法使得在家庭和做出好的数学所需要的生态环境之间找到平衡。

S. G.: Archimedes (阿基米德) 的例子清楚地表明，更省水的浴缸，同样可以激发数学家的灵感。

但是把浴室问题先放在一边，夏季项目给了学生一个非常好的体验，他们参加各种短期课程，并接触到广泛的数学课题，这对进一步研究非常有用，而且你的孩子并没有真正的去选择！PRIMES 在夏季有一个非常灵活的时间表，它允许我们的学生参加夏季项目，并且我们强烈鼓励他们这么做，这两个项目相得益彰，例如，PRIMES 的学生参加 RSI 的课题时做的经常是与 PRIMES 相关的课题，扩大了两个项目的影响，常常写出更加出色的文章。

“你们如何衡量成功？”

S. G.: 每年 PRIMES 的学生都会在国家科学竞赛中获许多奖项，包括那些最高奖项，例如，近 4 年之内，PRIMES 获得 24 项西门子大奖和 15 项 Intel STS 年终大奖，2014 西门子一、二等奖，2015 Intel STS 一、二、三等基础研究奖都来自 PRIMES，然而，这不是我们成功的主要标准，更重要的是在出版方面：我们的学生完成了 71 篇论文，其中 40 篇发布在 arXiv.org 上面，15 篇发表在高水平学术期刊上，另一个标准是入学记录：几乎所有我们的毕业生都去了顶尖大学，在那里是最好的学生之一，最后在 PRIMES-USA 里，申请者的人数在过去的两年里增加了两倍，但最重要的是，当我们的学生品味到真实数学研究并且爱上数学时，我觉得我们的使命完成了。

T. K.: 成功的最终衡量标准是在未来几年中，他们长大之后非常出色！能与下一代最好的数学家一起工作我感到荣幸。

“你们的目标是赢得最多数量的奖项吗？”

P. E.: 这不是真的. 我们告诉我们的学生不要过度关注赢得科学竞赛, 并且给他们解释数学研究更多的是合作, 而不是竞争. 然而竞争是一种有效的组织和激励因素. 在评委规定的一定时间内, 他们需要写一篇论文, 并使得它有点. 另外, 西门子和 Intel STS 竞赛为最终比赛做了极好的组织工作. 他们与非常专业的评委接触和讨论, 其中很多都是在其专业领域里最高水平的专业学者, 他们也互相学到了很多. 最后但并非最不重要的是, 他们非常风趣!

“你们希望所有 PRIMES 的数学学生成为数学家吗? 如果他们没有, 你们认为这是失败吗?”

T. K.: 不一定. 有些人可能希望做计算机科学, 法律, 商业, 医学等方面工作. 他们到我们这里来是因为他们想要挑战自己的头脑, 想看看数学研究是什么样子, 这些经验对于他们从事任何职业都是非常有价值的. 我们有一些实例, 有的学生非常喜欢做数学研究并且改变了他们的人生计划, 决定成为数学家. 我们也有其他的学生意识到他们不希望成为数学家. 他们有数学天赋, 但是他们的兴趣并不在这里. 在进入大学之前发现这些是非常有用的.

所以保证一个人成为数学家不是我们项目的要求. 求知欲和探索意愿才是更重要的. “你们做了什么工作来增加数学团体的多样性?”

S. G.: 2013 年我们成立了 PRIMES Circle, 一个为有才华的大二学生和从地方城市公立高中来的低年级学生成立的数学增强项目. 在麻省理工学院的本科生指导下, 以小组进行工作. PRIMES Circle 的参与者发现了数学思维方法之美并且为了解决具有挑战性的问题而兴奋. Circle 的学生学习几何, 概率, 组合, 纽结理论等方面的先进理论知识; 准备解释性的论文, 并且在麻省理工学院的小型会议上做专题发言. PRIMES Circle 从 2013 年的 8 人扩充到 2015 年的 15 人. 当前 Circle 的学生有 60% 是女性, 27% 是西班牙裔, 13% 是非裔美国人 (图 4).

在 2015 年我们组织了一个新的分部——MathROOTS, 由麻省理工学院在

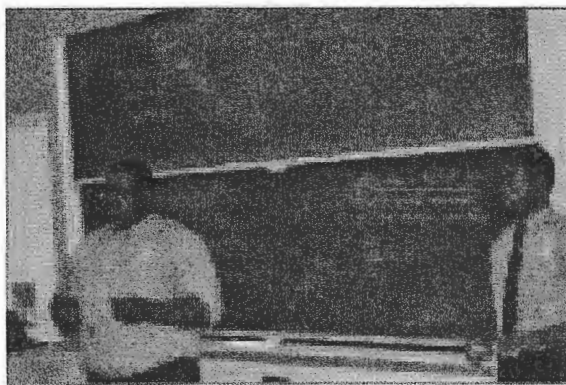


图 4 2013 Primes Circle 会议, 学生 Omotoyosi Oyedeji 和 Tyreik Silva 正在做关于概率论的报告



图 5 MathROOTS 的学生: (从左至右) Josue Sican, Ben Bennington-Brandon, Trajan Hammonds, Adedoyin Olateru-Olagbegi

全国范围内挑选对创造性的数学体验感兴趣的有前途的弱势背景高中学生进行为期 12 天的数学夏令营. MathROOTS 的学生发现新的数学想法并且通过一系列课程, 群体活动, 一些拥有不同经验的指导科研和数学竞赛教师的邀请报告来学习解决问题的技巧 (图 5).

PRIMES Circle 和 MathROOTS 的任务是通过帮助背景知识不足而能力强的学生发展他们的数学兴趣来增加数学团体多样性, 并为以后想在大学里选择数学类专业的学生铺路.

“学生们喜欢你们的项目吗?”

S. G.: 我们每年都会收集学生们对课题的反馈并且刊登在 PRIMES 的网站“感谢信 (Testimonials)”页面. 这里有几个摘录:

“从去年一月份开始的 PRIMES 项目, 我极度担心我将不会发现任何新事物. 然而这样的担心是多余的. 在前几次会议上, 我的导师为我的伙伴和我提供了阅读背景材料来帮助我们熟悉常用的方法. 在两个月内, 我们根据计算机模拟提出了一些我们自己的猜想, 不久之后, 我们甚至可以证明其中一些猜想.”

“我喜欢可以安静坐下来心无旁骛地思考问题的感觉. 这是一个轻松的环境, 在这里我进步迅速. PRIMES 是一个非常出色的计划, 在难以置信的专业人士和那些爱着数学和科学的导师帮助下, 年轻的时候就以这种效果显著的方式开始研究, 它会帮助你学到越来越多. 我非常高兴我选择来到 PRIMES, 它真正的影响了我作为一个学生, 一个数学家的生活.”

T. K.: 很多高中担心差生却并不担心聪明的学生变得无聊. 在我们的课程里没有人会无聊.

S. G.: 甚至没有项目主管! PRIMES 自成立以来扩大了近 4 倍, 目前拥有超过 100 个分支机构. 它的管理和财务已经与 PRIMES 课题一样充满挑战性!

“谁来为 PRIMES 买单?”

S. G.: PRIMES 对学生是免费的, 这是它为什么对麻省理工学院一点也不免费的原因. 但它是由于慷慨且有爱心的人赞助的. 最大的赞助来自数学科学的国家自然科学基金和麻省理工学院数学系 (它的前负责人 Mike Sipser 现在是麻省理工学院理学院院长, 目前主任是 Tom Mrowka), 自成立以来他们向 PRIMES 提供了关键的支持. NIH (National Institute of Health, 美国国立卫生研究院), Clay 数学促进会 (Clay Mathematics Institute), Simons (西蒙斯) 基金会, Rosenbaum 基金会, 一些公司和私人捐助者也作出了重大贡献. 值得提及的是, 麻省理工学院的数学教授 George Lusztig, 他在 2014 年获得了邵逸夫数学奖, 他把奖金的一部分做为非常有意义的礼物捐赠给 PRIMES. 这让我们能够建立 George Lusztig PRIMES 优秀指导教师奖. 这个奖授予在过去的几年中出色的数学导师.

P. E.: 事实上, 当大家都在认真思考数学的时候, 我们的项目总监不得不苦思冥想如何找到更多有巨大爱心的人, 而且总监一定会感谢你们的帮助!

“有一篇 PRIMES 的研究论文叫做“饼干怪兽玩游戏”. 这是一个认真的数学论文呢还是真的关于饼干的? 你们能为你们的研究提供饼干吗?”

T. K.: 这真的是认真的论文! 饼干怪兽只是以一种有趣的方式代表特定类的组合

题. 也就是说, 这里有几罐饼干. 一次行动中, 饼干怪兽可以选择一些罐子并取出相同数量的饼干. “给定罐中饼干的数量, 清空所有罐子至少需要几步?” 这个问题由 PRIMES 2013 的学生 Leigh Marie Braswell ([BK1]; [BK2]: 见图 6) 研究. 和另一名 PRIMES 2014 Joshua Xiong, 我们把饼干怪兽问题转化为一个游戏并且发现了一些有趣的现象 [KX].

P. E.: 参加我们的会议后, 麻省理工学院数学教授 Richard Stanley 发现饼干怪兽某种吃法 (只吃相邻罐子的饼干) 对应于单 Lie (李) 代数 $\mathfrak{sl}(n)$ 的根系统 A_{n-1} 的组合. 事实上, 有传言说在我的建议下麻省理工学院生物系基因工程鼓励学生学习 Lie 代数.

S. G.: 虽然研究饼干怪兽的问题并不真正需要饼干, 但是我们会在每年 5 月的 PRIMES 会议上提供饼干, 欢迎你们的到来. 事实上, 每一年的会议前夜 Pavel 都会驱车到 COSTCO (大型仓储式连锁超市) 为参会人员装满饼干. 这允许我们享受各种各样的美味饼干. 他们作为催化剂把咖啡变成定理!

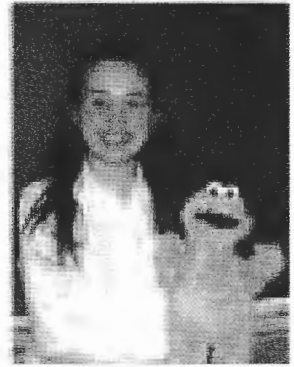


图 6 PRIMES 学生 Leigh Marie Braswell 和饼干怪兽 (2013 PRIMES 会议)

参考文献

- [BEJKL] S. Bhupatiraju, P. Etingof, D. Jordan, W. Kuzmaul, and J. Li, Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields, *J. Algebra* 372 (2012), 251–274.
- [BK1] L. M. Braswell and T. Khovanova, On the Cookie Monster Problem, arXiv:1309.5985.
- [BK2] ———, Cookie Monster devours naccis, *College Mathematics Journal* 45 (2014), no. 2.
- [CEJZ] Y. Chen, P. Etingof, D. Jordan, and M. Zhang, Poisson traces in positive characteristic, arXiv:1112.6385.
- [Ch] C. Chen, Maximizing volume ratios for shadow covering by tetrahedra, arXiv:1201.2580.
- [CKK] C. Chen, T. Khovanova, and D. A. Klain, Volume bounds for shadow covering, *Trans. Amer. Math. Soc.* 366 (2014), 1161–1177.
- [DS] S. Devadas and S. Sam, Representations of rational Cherednik algebras of $G(m,r,n)$ in positive characteristic, *J. Commut. Algebra* (online).
- [DT] F. Ding and A. Tsybaliuk, Representations of infinitesimal Cherednik algebras, *Represent Theory* (electronic) 17 (2013), 557–583.
- [Li] C. Lian, Representations of Cherednik algebras associated to symmetric and dihedral groups in positive characteristic, arXiv:1207.0182.
- [FX] Yael Fregier and Isaac Xia, Lower Central Series Ideal Quotients Over \mathbb{F}_p and \mathbb{Z} , arXiv:1506.08469.
- [Go] N. Golowich, Resolving a Conjecture on degree of regularity of linear homogeneous equations, *Electro. J. Combin.* 21 (2014), no. 3.
- [Ja] R. Jagadeesan, A new $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -invariant of dessins d’enfants, arXiv:1403.7690.
- [KL] Shashwat Kishore and Augustus Lonergan, Signatures of Multiplicity Spaces in tensor products of \mathfrak{sl}_2 and $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ Representations, arXiv:1506.02680.
- [KX] T. Khovanova and J. Xiong, Cookie Monster plays games, arXiv:1407.1533.
- [JSZ] T.-Y. Jiang, Z. Scully, and Y. X. Zhang, Motors and impossible firing patterns in the parallel chipfiring game, *SIAM J. Discrete Math.* 29 (2015), 615–630.
- [Z] J. Zurier, Generalizations of the Joints Problem, math.mit.edu/research/high-school/primers/materials/2014/Zurier.pdf.

(刘刚译 郭磊磊校)